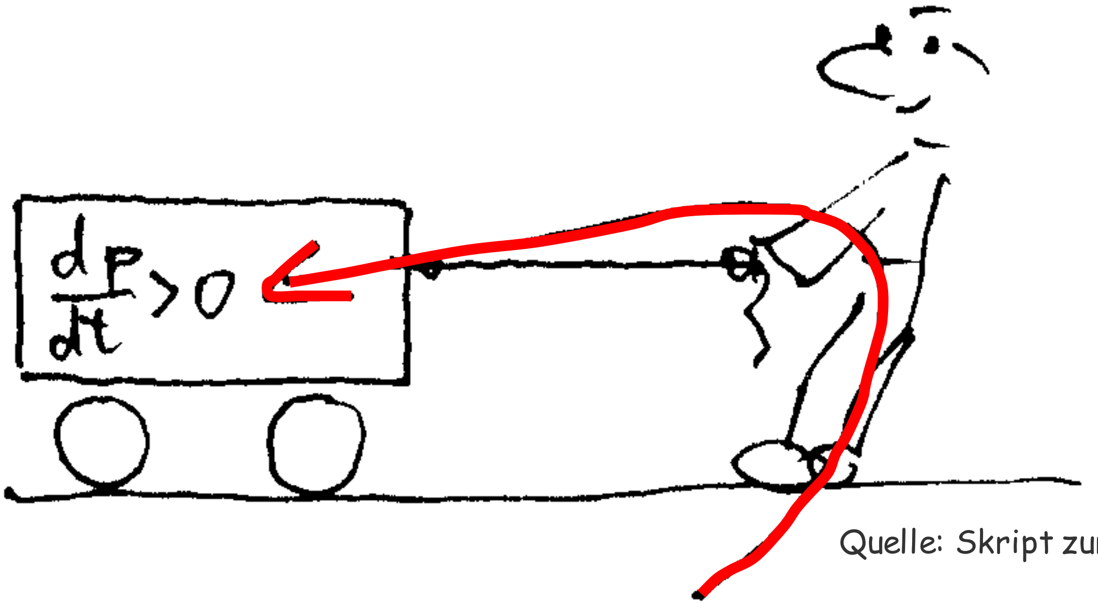
Vom Spannungstensor zum Impulsstrom

Christoph Kohstall

Physikalische Grundpraktika FU-Berlin



Quelle: Skript zur Mechanik, Herrmann

- Welche Größe wird durch den Pfeil symbolisiert?
- Wie hängt die Größe (formal) mit anderen Größen zusammen?
- Gibt es (formale) Einwände gegen die Verwendung der Größe im Schulunterricht?

Vom Spannungstensor zum Impulsstrom

Übersicht

- Allgemeines zu Tensoren
- Spannungstensor
- Impulsbilanz - Impulsstrom

>> Allgemeines zu Tensoren <<

Tensoren sind koordinatenunabhängige Größen die sich auf Richtungen beziehen

Beispiel 1: Skalare oder Tensoren 0. Stufe

Beispiel 2: Vektoren oder Tensoren 1. Stufe

$$\vec{v} = v^1 \cdot \vec{b}_1 + v^2 \cdot \vec{b}_2 \quad = \sum_{i=1}^{2} v^i \vec{b}_i$$

Maßzahlen / Koordinaten: v^1, v^2
Basisvektoren : $\vec{b}_1, \vec{b}_2$

Vereinfachung: Verwendung kartesischer Basisvektoren $\vec{e}_i$ =>
kein Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Größen =>
nur noch Indizes unten

>> Allgemeines zu Tensoren <<

Operationen mit Tensoren:

1. Vektoraddition für gleichartige Tensoren gleicher Stufe

$$\overleftrightarrow{T}_{III}(n) = \alpha \cdot \overleftrightarrow{T}_{I}(n) + \beta \cdot \overleftrightarrow{T}_{II}(n)$$

2. Tensorprodukt

$$\overleftrightarrow{T}_{III}(n+m) = \overleftrightarrow{T}_{I}(n) \otimes \overleftrightarrow{T}_{II}(m)$$

Beispiel:

$$\vec{r}_1 \otimes \vec{r}_2 = (\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2) \otimes (\gamma \cdot \vec{e}_1 + \delta \cdot \vec{e}_2) =$$

$$\alpha\gamma \cdot \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \alpha\delta \cdot \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \beta\gamma \cdot \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \beta\delta \cdot \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$

Tensor 2. Stufe

Matrixdarstellung

Beispiel

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \alpha\delta \\ \beta\gamma & \beta\delta \end{pmatrix}$$

Tensor 2. Stufe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

>> Allgemeines zu Tensoren <<

Operationen mit Tensoren:

3. Verjüngung / Spurbildung (Summation über Diagonalelemente)

$$\mathrm{VJ}\left(\overleftrightarrow{T}_{\mathrm{I}}(n+2)\right) = \overleftrightarrow{T}_{II}(n)$$

Beispiele:

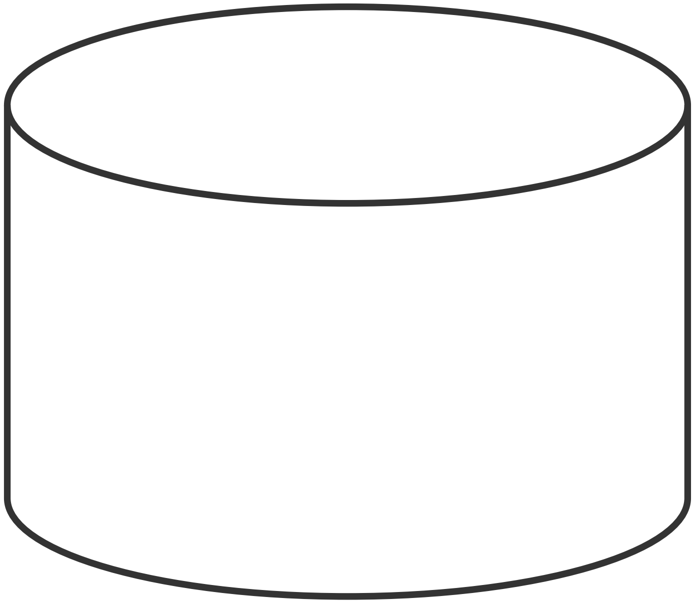
$$\mathrm{VJ}\left(\overleftrightarrow{T}(2)\right) \triangleq Sp(a_{ij}) = a_{11} + a_{22}$$

$Sp(\vec{r}_1 \otimes \vec{r}_2) = \alpha\gamma + \beta\delta \quad \triangleq$ Skalarprodukt von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$

$$\mathrm{VJ}\left(\overleftrightarrow{T}(2) \otimes \vec{r}\right) \triangleq Sp_{jk}\left(a_{ij} b_k\right) = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

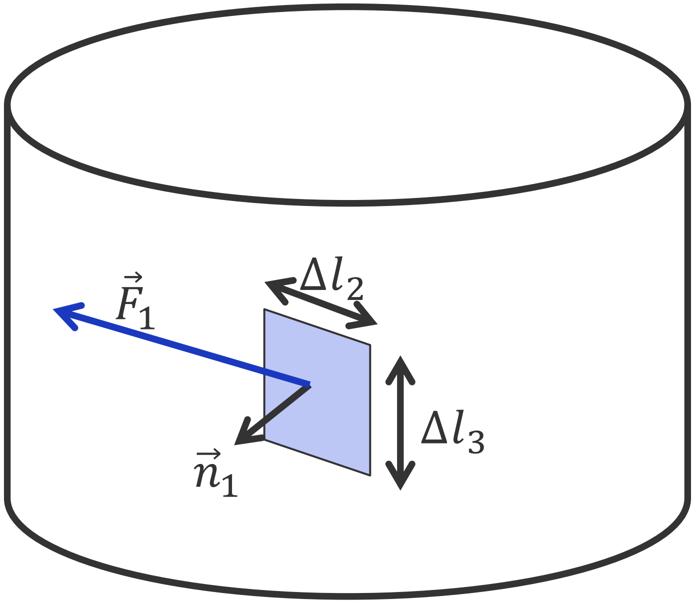
Mit Tensorprodukt und Verjüngung können koordinatenunabhängige Abhängigkeiten zwischen richtungsbezogenen Größen dargestellt werden

>> Spannungstensor <<



Materie durch innere Kräfte zusammengehalten

>> Spannungstensor <<



Materie wird durch innere Kräfte zusammengehalten

Fläche mit Normalen $\vec{n}_1$ und dem Flächeninhalt $\Delta l_2 \cdot \Delta l_3 = \Delta f$

Kraft $\vec{F}(\vec{n}_1)$, die durch die Fläche wirkt

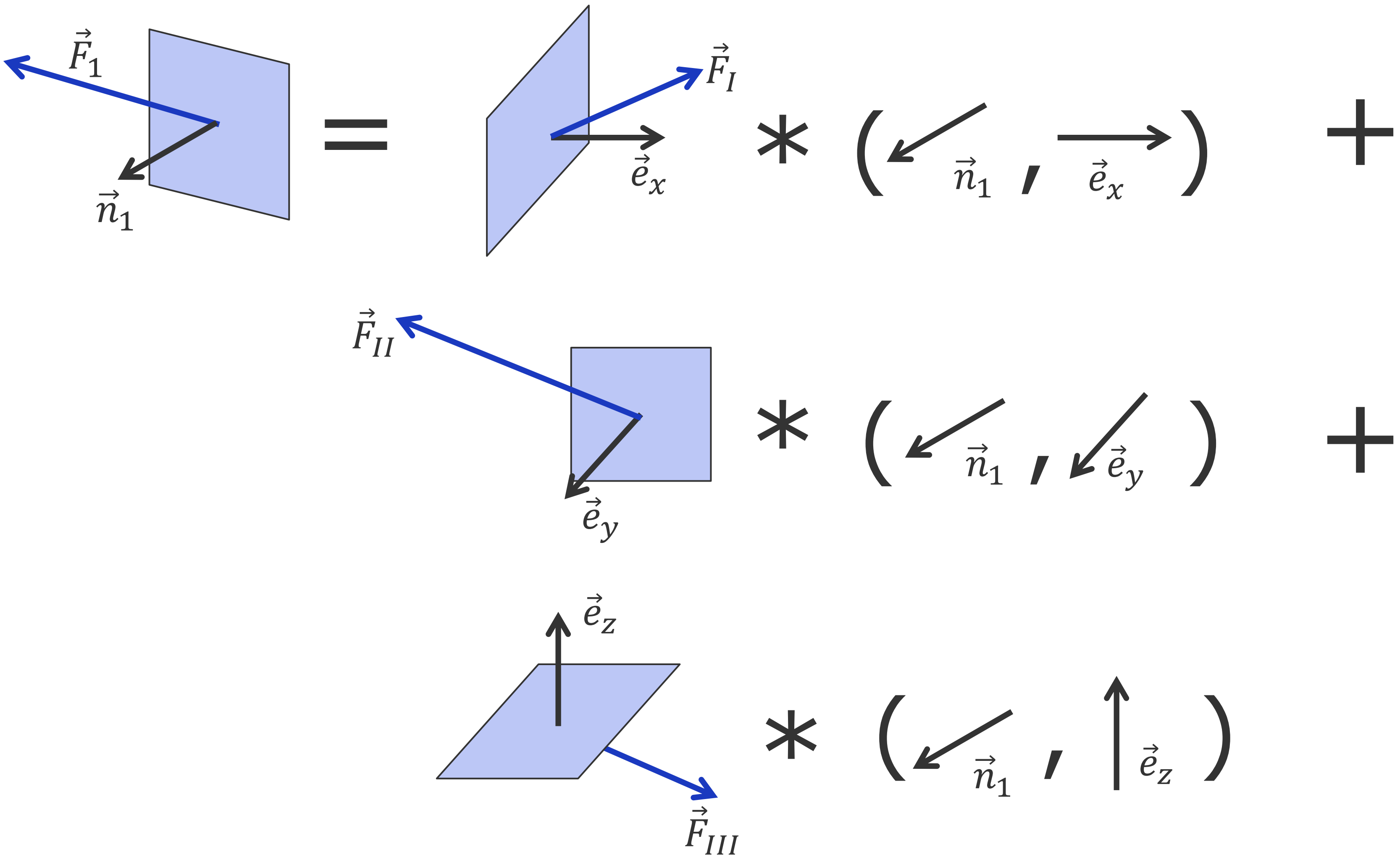
Im allgemeinen sind $\vec{n}_1$ und $\vec{F}(\vec{n}_1)$ nicht parallel zueinander

Der Spannungstensor $\overleftrightarrow{S}$ verknüpft $\vec{F}(\vec{n}_1)$ mit $\vec{n}_1 \Delta f$:

$\vec{F}(\vec{n}_1) = \overleftrightarrow{S}\,\vec{n}\Delta f$, Δf beliebig klein

>> Spannungstensor <<

Darstellung in x, y, z-Koordinaten



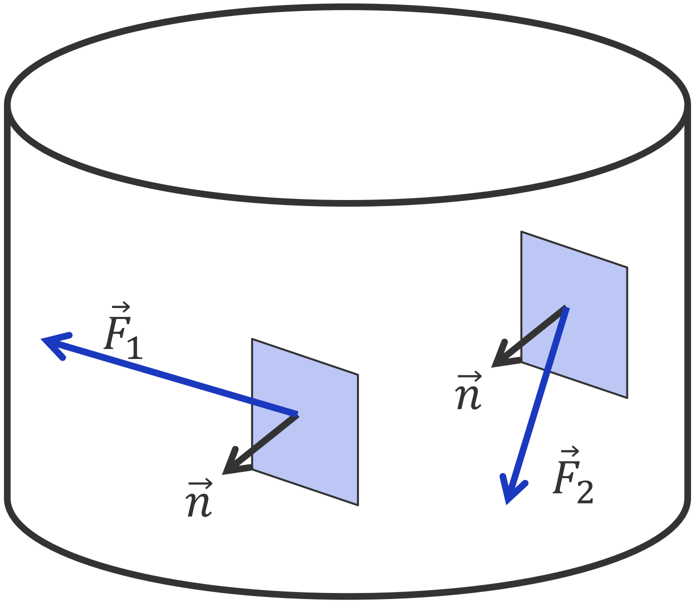
>> Spannungstensor <<

Matrixdarstellung in x, y, z-Koordinaten

$$\overleftrightarrow{S}\Delta f \triangleq \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} \Delta f = \begin{pmatrix} S_{xx}\Delta f & S_{xy}\Delta f & S_{xz}\Delta f \\ S_{yx}\Delta f & S_{yy}\Delta f & S_{yz}\Delta f \\ S_{zx}\Delta f & S_{zy}\Delta f & S_{zz}\Delta f \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$$

>> Spannungstensor <<



im Allgemeinen gilt: $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{S}$ ist ein Tensorfeld

Weitere Eigenschaft:

$\overleftrightarrow{S}$ ist symmetrisch, d.h. $S_{xy} = S_{yx}, S_{xz} = S_{zx}, S_{yz} = S_{zy}$!

(z.B. Feynman Vorlesungen, Kapitel 31)

>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Impulsbilanz:

$$\frac{d}{dt}\iiint \vec{\pi}\, dV + \oiint \vec{\pi} \otimes \vec{v}\, \vec{n}\, df + \oiint \left(-\overleftrightarrow{S}\right) \vec{n}\, df + \iiint \rho \vec{f}\, dV = 0$$

Impulsänderung $\dot{\vec{p}}$
im Raumgebiet

Konvektion
Strom durch
Oberfläche

Spannungen
Strom durch
Oberfläche

Volumenkräfte
Senken oder Quellen
im Raumgebiet

>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Impulsbilanz:

Impulsänderung im Raumgebiet + Strom von Impuls durch Oberfläche + Quelle oder Senke von Impuls im Raumgebiet = 0

daher: negativer Spannungstensor $-\overleftrightarrow{S}$ = Impulsstromdichte $\overleftrightarrow{j}$

und

Impulsstromstärke $\vec{I} = \iint \overleftrightarrow{j}\ \vec{n} df$

>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Impulsbilanz:

$$\frac{d}{dt}\iiint \vec{\pi}\, dV + \oiint \overleftrightarrow{j}\ \vec{n}\, df =$$

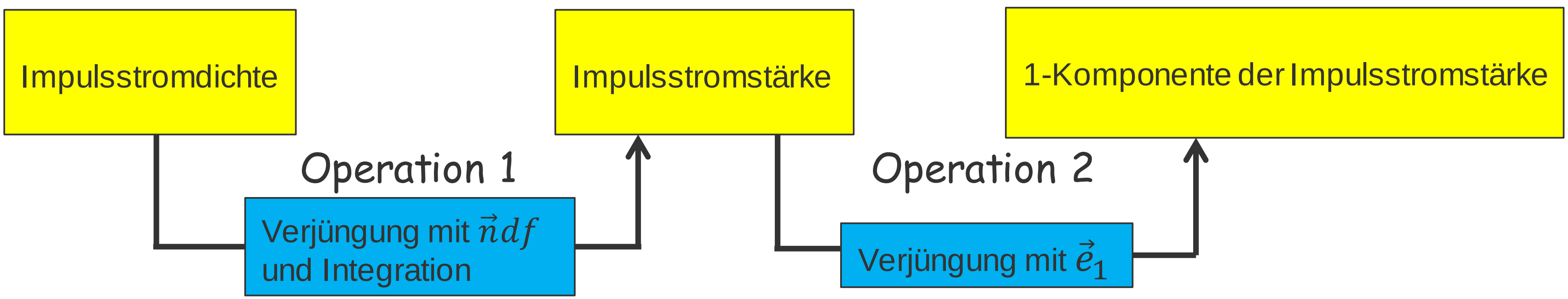
$$\dot{\vec{p}} \quad + \quad \vec{I} \quad = 0$$

Vergleich mit $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ ergibt $\vec{I} = -\vec{F}$

>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Projektion von $\vec{I}$ auf $\vec{e}_1$ $\Rightarrow$ 1-Komponten I_1 von $\vec{I}$

$$I_1 = -F_1 = \left(\iint \overleftrightarrow{J}\ \vec{n}\,df\right) \cdot \vec{e}_1$$



>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Projektion von $\vec{I}$ auf $\vec{e}_1$ $\Rightarrow$ 1-Komponenten I_1 von $\vec{I}$

$$I_1 = -F_1 = \left(\iint \overleftrightarrow{j}\ \vec{n}\,df\right) \cdot \vec{e}_1$$

Impulsstromdichte

Operation 1

Verjüngung mit $\vec{n}\,df$ und Integration

Impulsstromstärke

Operation 2

Verjüngung mit $\vec{e}_1$

1-Komponente der Impulsstromstärke

Da $\overleftrightarrow{j} = -\overleftrightarrow{S}$ ein symmetrischer Tensor ist, sind die Operationen vertauschbar!

>> Impulsbilanz – Impulsstrom <<

Projektion auf $\vec{e}_1$

$$\left(\frac{d}{dt}\iiint \vec{\pi}\, dV + \oiint \overleftrightarrow{J}\ \vec{n}\, df\right)\cdot \vec{e}_1 = \frac{d}{dt}\iiint \vec{\pi}\cdot \vec{e}_1\, dV + \oiint (\overleftrightarrow{J}\ \vec{n})\cdot \vec{e}_1\, df =$$

$$\frac{d}{dt}\iiint \vec{\pi}\cdot \vec{e}_1\, dV + \oiint (\overleftrightarrow{J}\ \vec{e}_1)\cdot \vec{n}\, df =$$

$$\frac{d}{dt}\iiint \pi_1\, dV + \oiint \vec{J}_1\cdot \vec{n}\, df = 0 \qquad (1)$$

mit: $p_1 = \iiint \pi_1\, dV$

>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Impulsbilanz:

$$\boxed{\text{Änderung von } p_1 \text{ im Raumgebiet}} + \boxed{\text{Strom von } p_1 \text{ durch Oberfläche}} \left(+ \boxed{\text{Quelle oder Senke von } p_1 \text{ im Raumgebiet}} \right) = 0$$

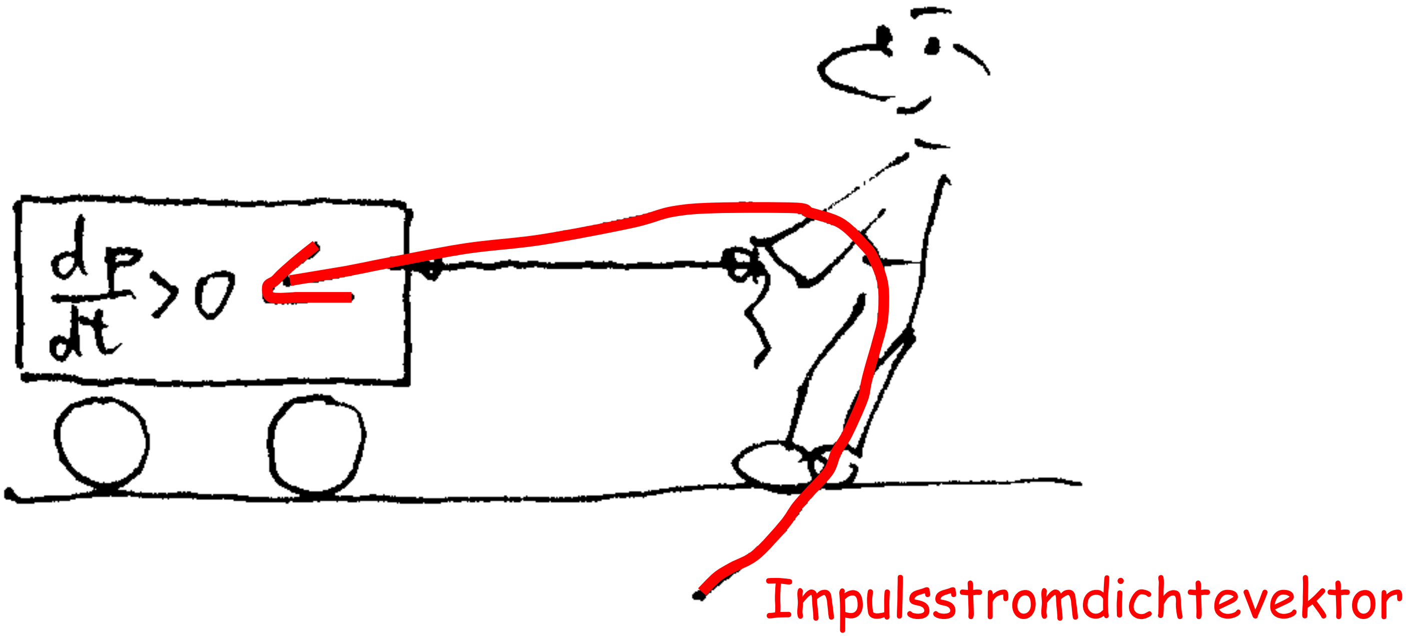
daher: $\vec{j}_1 = \overleftrightarrow{j}\,\vec{e}_1$ ist Impulsstromdichtevektor

$I_1 = -F_1 = \oiint \vec{j}_1 \cdot \vec{n}\, df$ ist 1-Komponente der Impulsstärke

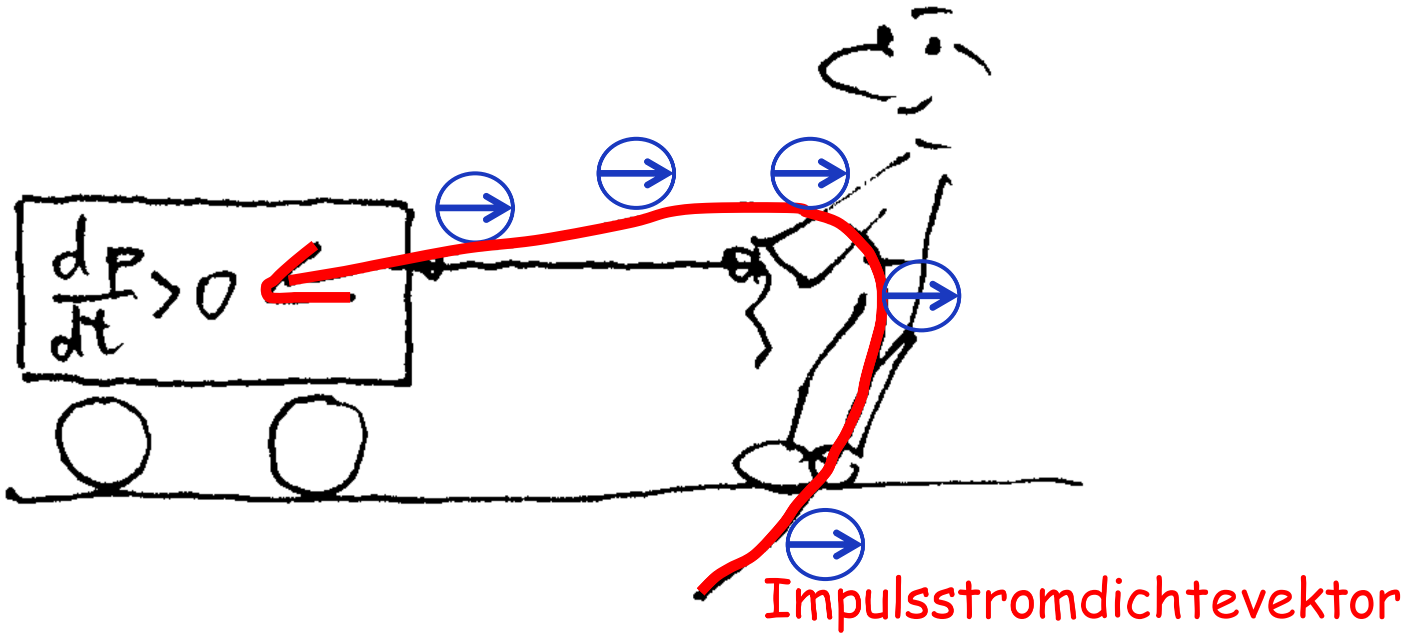
$\vec{j}_1$ und $\vec{e}_1$ sind allgemein nicht parallel

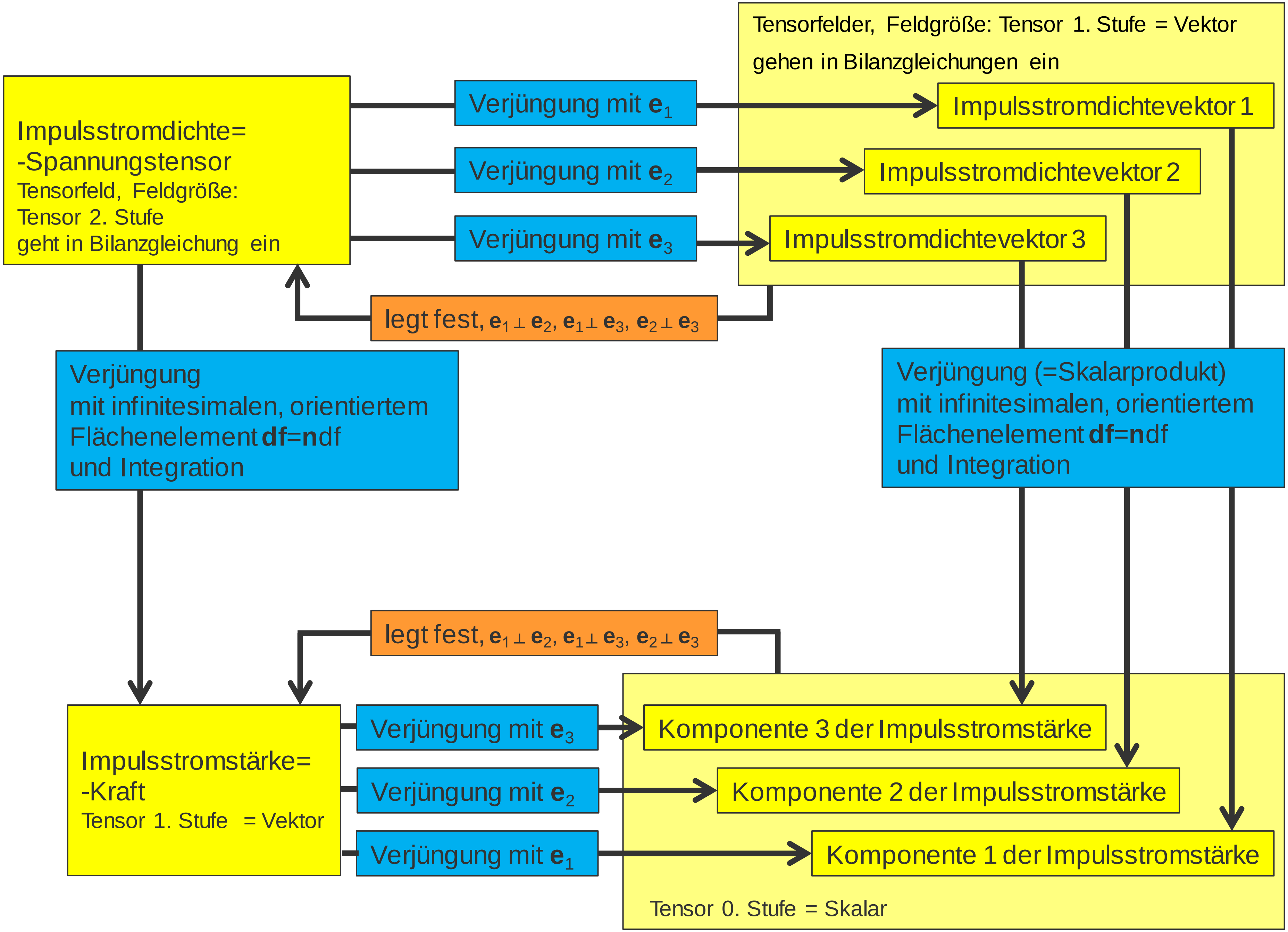
$$\frac{d}{dt} \iiint \pi_1 \, dV + \oiint \vec{j}_1 \cdot \vec{n}\, df = \dot{p}_1 + I_1 = 0$$

>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<



>> Impulsbilanz – Impulsstrom <<




Impulsstromdichte=
-Spannungstensor
Tensorfeld, Feldgröße:
Tensor 2. Stufe
geht in Bilanzgleichung ein
Verjüngung mit $\mathbf{e}_1$
Verjüngung mit $\mathbf{e}_2$
Verjüngung mit $\mathbf{e}_3$
Tensorfelder, Feldgröße: Tensor 1. Stufe = Vektor
gehen in Bilanzgleichungen ein
Impulsstromdichtevektor 1
Impulsstromdichtevektor 2
Impulsstromdichtevektor 3
legt fest, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$
Verjüngung
mit infinitesimalen, orientiertem
Flächenelement $\mathbf{df}$=$\mathbf{n}$df
und Integration
Verjüngung (=Skalarprodukt)
mit infinitesimalen, orientiertem
Flächenelement $\mathbf{df}$=$\mathbf{n}$df
und Integration
legt fest, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$
Impulsstromstärke=
-Kraft
Tensor 1. Stufe = Vektor
Verjüngung mit $\mathbf{e}_3$
Verjüngung mit $\mathbf{e}_2$
Verjüngung mit $\mathbf{e}_1$
Komponente 3 der Impulsstromstärke
Komponente 2 der Impulsstromstärke
Komponente 1 der Impulsstromstärke
Tensor 0. Stufe = Skalar

Ende

Bronstein „Taschenbuch der Physik“ ergänzende Kapitel,
Kapitel 8.3.:

„Viele physikalische und geometrische Größen haben einerseits eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, anderseits kann man ihnen in jedem Koordinatensystem gewisse Maßzahlen zuordnen, die sich im allgemeinen von Koordinatensystem zu Koordinatensystem ändern. …
Die allgemeine Tensorrechnung untersucht die Eigenschaften solcher sich ändernder Maßzahlen.“

Vektoren oder Tensoren 1. Stufe

$$\vec{v} = v^1 \cdot \vec{b}_1 + v^2 \cdot \vec{b}_2 + v^3 \cdot \vec{b}_3 \quad = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i \qquad (1)$$

Maßzahlen / Koordinaten: v^1, v^2, v^3

Basisvektoren : $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

Transformation von Basisvektoren und Koordinaten:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i \tag{2}$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v'^i \, \overrightarrow{b'}_i \tag{3}$$

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{3} A_i{}^j \, \overrightarrow{b'}_j \tag{4}$$

(4) in (2) und Vertauschung der Summation:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} v^i \left(\sum_{j=1}^{3} A_i{}^j \, \overrightarrow{b'}_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} v^i A_i{}^j \right) \overrightarrow{b'}_j \tag{5}$$

Koeffizientenvergleich rechte Seite von (5) und (3) liefert:

$$v'^j = \sum_{i=1}^{3} v^i A_i{}^j \tag{6}$$

Verwendung kartesischer Basisvektoren =>
keine Unterscheidung von ko- und kontravarianten Größen =>
nur noch Indizes unten

Tensor n-ter Stufe:

$$\overleftrightarrow{T}(n) = \sum_{i_1 \ldots i_n = 1}^{m} a_{i_1 \ldots i_n} \ \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n}$$

$\otimes$ dyadisches Produkt

Operationen mit Tensoren

a. Tensorprodukt

$$\overleftrightarrow{T}_{III}(n+m) = \overleftrightarrow{T}_{I}(n) \otimes \overleftrightarrow{T}_{II}(m)$$

$$a_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m} \ \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_m} =$$

$$\left(a_{i_1 \ldots i_n} \ \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n}\right) \otimes \left(a_{j_1 \ldots j_m} \ \vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_m}\right) =$$

$$a_{i_1 \ldots i_n} * a_{j_1 \ldots j_m} \ \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_m}$$

b. Verjüngung (Spurbildung)

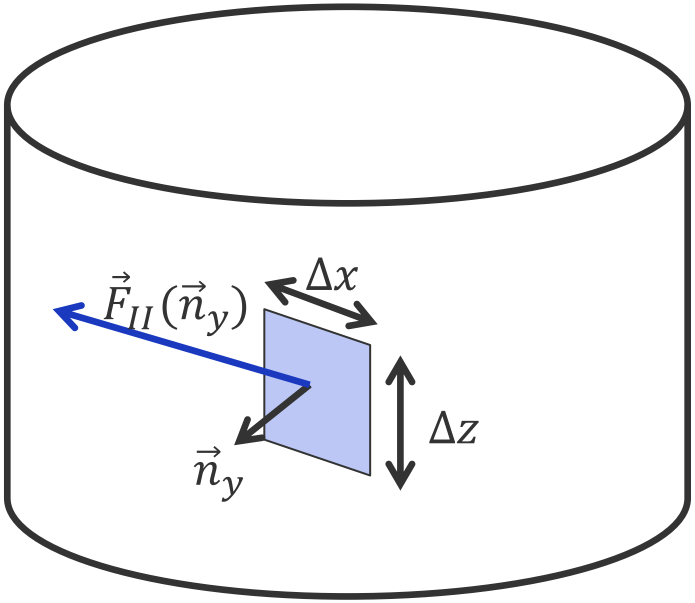
$$a_{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_l} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n} \rightarrow$$

$$\sum_{i_k, i_l, i_k = i_l}^{m} a_{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{k-1}} \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{l-1}} \otimes \vec{e}_{i_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n} =$$

$$a_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_n} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{k-1}} \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{l-1}} \otimes \vec{e}_{i_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n}$$

c. Überschiebung = Tensorprodukt + Verjüngung

>> Spannungstensor <<



Materie wird durch innere Kräfte zusammengehalten

Fläche mit Normalen $\vec{n}_y$ und dem Flächeninhalt $\Delta x \cdot \Delta z = \Delta f$ (beliebig klein)

Kraft $\vec{F}_{II}(\vec{n}_y)$, die durch die Fläche wirkt

Im allgemeinen sind $\vec{n}_y$ und $\vec{F}_{II}(\vec{n}_y)$ nicht parallel zueinander !

Spannungsvektor: $\vec{S}_{II}(\vec{n}_y) = \frac{\vec{F}_{II}\,(\vec{n}_y)}{\Delta x \cdot \Delta z}$

analog: $\vec{S}_{I}(\vec{n}_x) = \frac{\vec{F}_{I}\,(\vec{n}_x)}{\Delta y \cdot \Delta z}$, $\vec{S}_{III}(\vec{n}_z) = \frac{\vec{F}_{III}\,(\vec{n}_z)}{\Delta x \cdot \Delta y}$

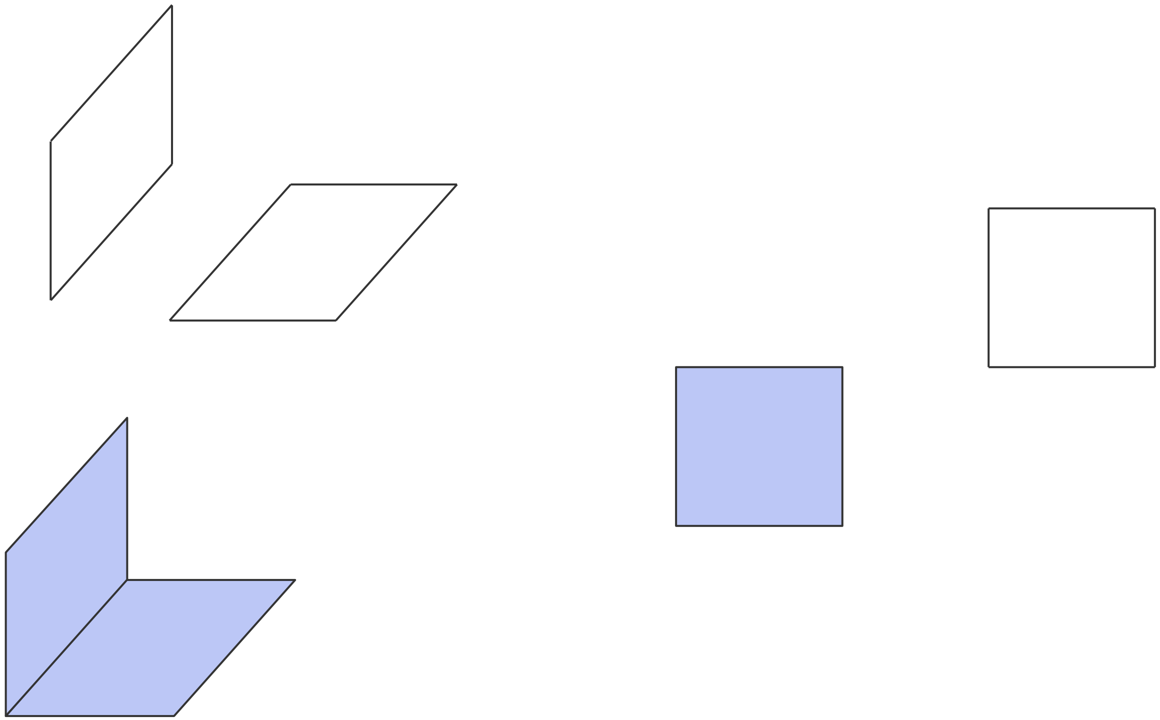
>> Spannungstensor <<

$$\overleftrightarrow{S} = \vec{S}_I(\vec{n}_x) \otimes \vec{n}_x + \vec{S}_{II}(\vec{n}_y) \otimes \vec{n}_y + \vec{S}_{III}(\vec{n}_z) \otimes \vec{n}_z$$

$$\begin{pmatrix} S_{xI} \\ S_{yI} \\ S_{zI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{xII} \\ S_{yII} \\ S_{zII} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{xIII} \\ S_{yIII} \\ S_{zIII} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

>> Spannungstensor <<

$\overleftrightarrow{S}\vec{n}$ in Matrixdarstellung



>> Impulsbilanz - Impulsstrom <<

Impulsbilanz:

$$\frac{d}{dt}\iiint \vec{\pi}\, dV - \oiint \overleftrightarrow{S}\ \vec{n}\, df + \iiint Volumen\ dV = 0$$

Impulsänderung $\dot{\vec{p}}$

Strom durch Oberfläche

Impulsquelle oder -senke

daher: negativer Spannungstensor $-\overleftrightarrow{S}$ = Impulsstromdichte $\overleftrightarrow{j}$

und

Impulsstromstärke $\vec{I} = \iint \overleftrightarrow{j}\ \vec{n}\, df$