Stromrichtung und Vorzeichen der Stromstärke

F. Herrmann, Institut für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe

1. Einleitung

Im vorangehenden Aufsatz wurde gezeigt, daß durch einen Körper, der unter Druck- oder Zugspannung steht, ein Impuisstrom fließt. Obwohl der Schluß auf einen solchen Impulsstrom im Rahmen der Überlegungen des vorigen Aufsatzes durchaus zwingend war, könnte man auf Grund eines anderen Arguments dennoch an seiner Richtigkeit zweifeln. Wir betrachten dazu die Anordnung der Abb. 1, bei der die Feder im oberen Teil unter Zuspannung stehen soll. Die Symmetrie der Anordnung legt den Schluß nahe, daß durch die Feder kein Impulsstrom fließen kann, daß also die Impulsstromstärke den Wert Null haben muß. Dieser Schluß ist jedoch falsch. Tatsächlich fließt ein Impulsstrom in einer wohl definierbaren Richtung. Das Problem der Richtung von Impulsströmen ist allerdings nicht ganz trivial. Wir wollen uns daher zunächst am etwas einfacheren analogen Problem in der Elektrizitätslehre orientieren.

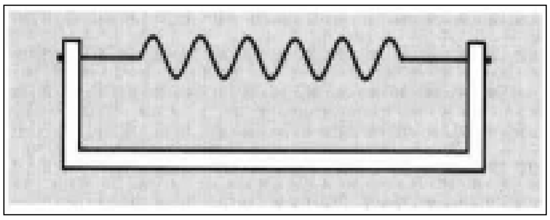

Abb. 1 Aus der Symmetrie dieser Anordnung scheint zu folgen, daß kein Impulstrom fließt.

2. Stromrichtung und Vorzeichen der Stromstärke

Fragt man nach der Richtung des elektrischen Stroms an einer bestimmten Stelle eines Stromkreises, etwa des Stromkreises von Abb. 2, so erwartet man als Antwort einen Pfeil. Dieser Pfeil gibt die Richtung eines Vektors an: des Vektors der Stromdichte. Hat dieses Vektorfeld über einen größeren Bereich überall dieselbe Richtung, so ist der Pfeil für den ganzen Bereich repräsentativ. In Abb. 3 ist das für ein Stück Draht dargestellt. Wir wollen das in Form einer Regel festhalten:

> Unter der Stromrichtung an einer Stelle versteht man die Richtung des Vektorfeldes der Stromdichte an dieser Stelle.

Bei dem in der Einleitung zitierten Problem geht es uns genau genommen gar nicht um den ganzen Pfeil. Daß nämlich die Pfeile in Abb. 1 oder Abb. 2 parallel zu den jeweiligen Leitern liegen müssen, wird man wahrscheinlich für selbstverständlich halten. Das Problem besteht vielmehr darin, an welchem Ende sich die Pfeil*spitze* befindet. Wir können das auch so ausdrücken: Gegeben ist ein Stromlinienfeld, aber an den Feldlinien ist die Orientierung nicht markiert. Mit der Frage nach der Stromrichtung meinen wir die Frage nach der Orientierung der sonst bekannten Stromlinien.

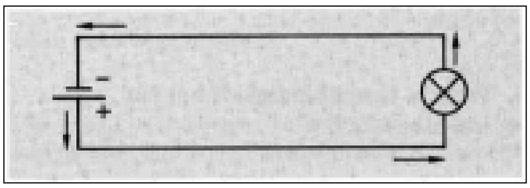

Abb. 2 Die Pfeile geben die Richtung der Stromdichtevektoren an.

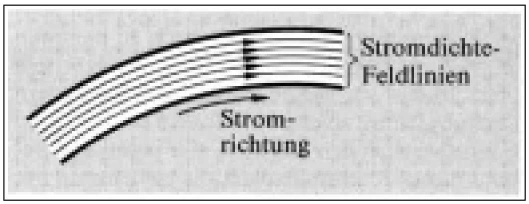

Abb. 3 Da das Stromdichtevektorfeld über den ganzen Querschnitt dieselbe Richtung hat, genügt zur Kennzeichnung der Richtung ein einziger Pfeil.

Nicht zu verwechseln mit der Frage nach der *Stromrichtung* ist die Frage nach dem *Vorzeichen der Stromstärke*. Stromstärke I und Stromdichte $\boldsymbol{j}$ hängen zusammen über

$$I = \int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A} \tag{1}$$

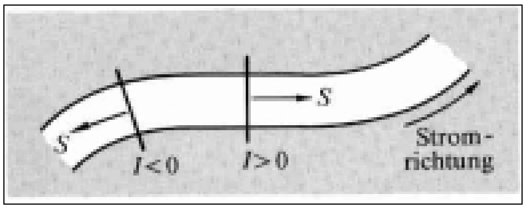

Abb. 4 Das Vorzeichen der Stromstärke hängt von der Orientierung der Fläche ab, auf die sie sich bezieht.

Man erkennt an dieser Beziehung, daß die Stromstärke eine Größe ist, die einer Fläche zugeordnet ist, der Fläche $\boldsymbol{S}$, über die in (1) integriert wird. Das Vorzeichen von I hängt außer von der Orientierung von $\boldsymbol{j}$ noch von der Orientierung dieser Fläche ab, Abb. 4. Man sieht, daß die Frage “Wie groß ist die Stärke des Stromes im Draht?” gar keine eindeutige Antwort besitzt. Sie unterstellt, daß man den Wert der Stromstärke eindeutig angeben kann, wenn die Stelle festgelegt ist, “an der der Strom vorbeifließt”, oder anders gesagt, wenn nur ein Querschnitt, also eine *nichtorientierte* Fläche angegeben wird. Korrekt gestellt müßte die Frage heißen: “Wie groß ist die Stärke des Stroms durch die und die orientierte Fläche?” Die Antwort hierauf ist eindeutig. Der Wert der Stromstärke kann, je nach Wahl der Orientierung der Fläche, positiv oder negativ sein. Wir wollen als Regel festhalten:

> Eine Stromstärke bezieht sich stets auf eine orientierte Fläche.

Daß man sich trotzdem verständlich macht, wenn man einfach von der Stromstärke “in einem Draht” spricht, liegt daran, daß man meist von der stillschweigenden Voraussetzung ausgeht, daß nur der Betrag der Stromstärke interessiert.

Oft stellt sich die Frage nach der Stärke des Stroms durch eine *geschlossene* Fläche. In diesem Fall ist es möglich, eine Konvention über die Orientierung der Fläche zu treffen, z. B.:

> Eine geschlossene Fläche ist so orientiert, daß der Flächennormalenvektor an jeder Stelle nach außen weist.

Damit läge das Vorzeichen der Stärke eines Stroms durch die Fläche eindeutig fest. Tatsächlich wird diese Konvention in der Theoretischen Physik befolgt. Sie hat zur Folge, daß die Kontinuitätsgleichung einer Erhaltungsgröße X in ihrer integralen Formulierung die Form annimmt:

$$\frac{dX}{dt} + I_X = 0 \tag{2}$$

Die zeitliche Änderung dX/dt der Größe in einem Raumbereich plus die Stärke I_X des Stroms der Größe X durch die den Raumbereich begrenzende geschlossene Fläche ist gleich Null. Für die elektrische Ladung lautet die Kontinuitätsgleichung bei Zugrundelegen dieser Konvention:

$$\frac{dQ}{dt} + I_Q = 0$$

In vielen Experimentalphysikbüchern und insbesondere in Schulphysikbüchern wird allerdings die umgekehrte Konvention zugrunde gelegt:

> Eine geschlossene Fläche ist so orientiert, daß der Flächennormalenvektor an jeder Stelle nach innen

weist.

Daß von ihr Gebrauch gemacht wird, auch wenn sie nicht explizit ausgesprochen wird, erkennt man daran, daß Kontinuitätsgleichungen in der Form

$$\frac{dX}{dt} = I_X$$

geschrieben werden. So ist es z.B. üblich, den Zusammenhang zwischen der Änderung der Ladung $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ in einen Raumbereich und der Stromstärke I_Q durch die Begrenzungsfläche des Raumbereichs zu schreiben:

$$\frac{dQ}{dt} = I_Q$$

(Leider wird diese Gleichung manchmal als Definitionsgleichung der elektrischen Stromstärke mißverstanden). Dieselbe Vorzeichenkonvention liegt der üblichen Schreibweise des zweiten *Newtonschen* Axioms zugrunde:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}(= \boldsymbol{I_p})$$

3. Wodurch die Orientierung von Stromlinien festgelegt ist

Die Stromrichtung an irgendeiner Stelle eines einfachen elektrischen Stromkreises, etwa des in Abb. 2 wiedergegebenen, anzugeben, bereitet keine Schwierigkeiten. Man benutzt dazu die Regel, nach der in jedem *Ohmschen* Leiter (allgemeiner in jedem Verbraucher elektrischer Energie) der Strom vom hohen zum niedrigen elektrischen Potential fließt.

Vermutlich wird man sich jedoch daran erinnern, gelernt zu haben, diese Regel stelle nur eine *Konvention* dar. Man hätte genausogut festlegen können, der Strom fließe vom Minuspol zum Pluspol. Manchmal hört oder liest man auch, diese Konvention sei getroffen worden, als man über Leitungsmechanismen noch nicht so gut Bescheid wußte wie heute, und daß es vernünftiger gewesen wäre festzusetzen, der Strom fließe vom Minus- zum Pluspol, da das ja in den meisten Fällen tatsächlich der Fall sei. Die Konvention sei also eigentlich unglücklich, was aber, Gott sei Dank, keinerlei schädliche Konsequenzen habe.

Es soll nun gezeigt werden, daß wir froh sein können, daß die Konvention so getroffen ist, wie sie es ist, ja daß man hier von einer Konvention gar nicht sprechen sollte. Wir betrachten dazu Abb. 5.

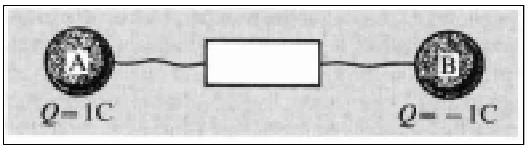

Abb. 5 Die elektrische Ladung von A nimmt ab, die von B zu. Es fließt also ein Strom von links nach rechts.

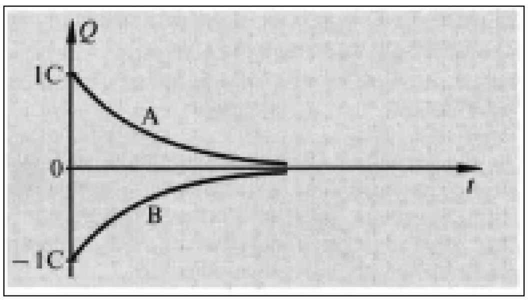

Abb. 6 Die Ladung der Gegenstände A und B in Abb. 5 als Funktion der Zeit

Ein positiv geladener Gegenstand A ist über einen Widerstand mit einem negativ geladenen Gegenstand B verbunden. Zwischen A und B fließt ein elektrischer Strom, so daß die Ladung von A ab-, und die von B zunimmt, Abb. 6. Auf Grund der “Konvention” über die Stromrichtung sagen wir, daß der elektrische Strom von A nach B fließt. Aus dem Körper, dessen Ladung abnimmt, fließt der Strom *heraus,* in den

Körper, dessen Ladung zunimmt, fließt er *hinein.*

Wäre die Konvention umgekehrt getroffen worden, so nähme die Ladung des Körpers, in den der Strom *hinein*fließt, *ab* und die des Körpers, aus dem sie *heraus*fließt, nähme *zu.* Diese Aussage würde zwar nicht zu logischen Widersprüchen führen, man würde sie aber als sehr unnatürlich empfinden. Die physikalische Größe Stromstärke würde gerade das messen, was in unserer Anschauung das Negative der Stromstärke ist. Das wäre etwa so, als würde man die Dichte ρ_X einer mengenartigen Größe X als $\rho_X = -X/V$ definieren statt, wie es üblich ist, $\rho_X = +X/V$.

Wir wollen die, wie wir gesehen haben, vernünftige Festlegung der elektrischen Stromrichtung verallgemeinern und als Regel formulieren (siehe auch Abb. 7):

> Nimmt in einem Raumbereich der Wert einer Größe X ab, so fließt aus dem Bereich ein X-Strom heraus.

Wir möchten den Leser noch auf eine Schwierigkeit aufmerksam machen, die ihm vielleicht entgangen ist und die immer dann auftritt, wenn von der Zu- oder Abnahme einer Größe die Rede ist, die nicht nur positive, sondern auch negative Werte annehmen kann. Wir haben die zeitliche Abnahme einer Größe X konsequent damit identifiziert, daß $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t < 0$ ist. Das ist unabhängig davon, ob $X > 0$ oder $X < 0$ ist. In der Umgangssprache, ja sogar in einer etwas sorglosen Physikersprache ist aber ein anderer Brauch weit verbreitet: Spricht man von der zeitlichen Abnahme der mengenartigen Größe X, so meint man nicht, daß $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t < 0$, sondern daß $|\mathrm{d}X/\mathrm{d}t| < 0$ ist. Es schockiert sicher keinen, wenn er hört, in Abb. 5 nehme die elektrische Ladung beider Körper ab, nicht nur die des Körpers A. Mit “elektrischer Ladung” ist aber bei so einer Sprechweise “Betrag der elektrischen Ladung” gemeint. In derselben Lage sind wir beim Impuls. Von einem bremsenden Fahrzeug sagen wir gewöhnlich leichtfertigerweise, sein Impuls nehme ab, gleichgültig, ob das Fahrzeug nach rechts oder links fährt.

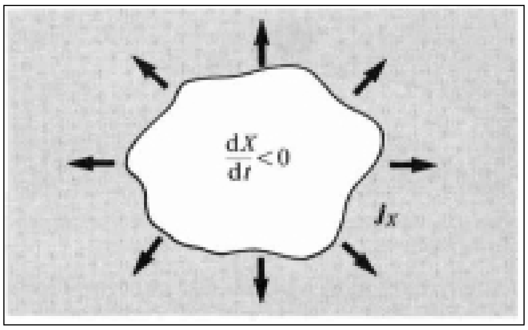

Abb. 7 Der Wert der Größe X nimmt in dem abgegrenzten Raumbereich ab. Da X eine Erhaltungsgröße ist, muß ein X-Strom aus dem Bereich herausfließen.

Dieselbe Schwierigkeit äußert sich auch, wenn wir entscheiden sollen, welcher von zwei Werten einer Größe der größere ist. Welcher Körper hat die größere Ladung: der mit Q = 1C oder der mit Q = – 2C? Die Antwort heißt: Der Körper mit Q = 1C hat die größere Ladung, denn lC > – 2C. Unsere Neigung, die Entscheidung über das, was “größer” und was “kleiner” bedeutet, nur auf den Betrag der Größe zu beziehen, hat ihren Ursprung wahrscheinlich in der Symmetrie der Effekte, die durch positive und negative Werte hervorgerufen werden. Es gibt übrigens eine Größe, bei der diese Effekte sehr unsymmetrisch sind: das Geld. Wenn man fragt: “Was ist mehr Geld, was repräsentiert den größeren Wert: + 10 000 DM oder – 20 000 DM (d. h. 20 000 DM Schulden)?”, so wird sicher kein Mensch die Absolutbeträge dieser beiden Werte zur Entscheidung heranziehen.

4. Teilchenströme

Der Inhalt der im vorigen Abschnitt formulierten Regel steht im Widerspruch zu einer weit verbreiteten und offenbar sehr einleuchtenden Vorstellung: Außer der konventionellen gibt es noch eine wirkliche, physikalische Richtung des elektrischen Stroms, und diese ist, je nach Leitungsmechanismus, verschieden. In Metallen, sagt man, fließt der elektrische Strom von Minus nach Plus, in p-dotierten Halbleitern dagegen von Plus nach Minus. Man kann sogar, heißt es, einen Gegenverkehr von Strömen elektrischer Ladung antreffen.

Diese Vorstellungen beruhen auf einem Fehler: der Verwechslung des elektrischen Stroms mit dem Strom der Ladungsträger. Ladungsträger können Elektronen, Defektelektronen, Ionen oder andere geladene Teilchen oder Stoffe sein. Das, was man den Ladungsträger nennt, wird repräsentiert durch den Strom der physikalischen Größe Menge (= Stoffmenge). Bei gegebener Richtung des elektrischen Stroms kann der Mengenstrom der Ladungsträger in die eine oder in die andere Richtung fließen, je nachdem, welches der Ladungsträger ist, Abb. 8. Bei Defektelektronen, positiven Ionen oder positiven Myonen haben elektrischer Strom und Mengenstrom dieselbe Richtung, bei Elektronen und allen anderen negativ geladenen Stoffen haben sie entgegengesetzte Richtung.

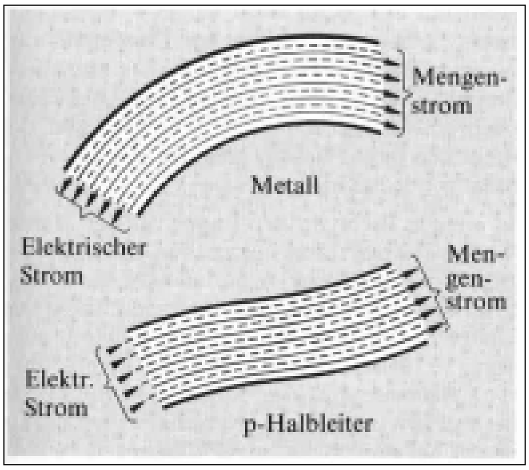

Abb. 8 In einem Metall haben elektrischer Strom und Mengenstrom der Ladungsträger entgegengesetzte, in einem p-Halbleiter dieselbe Richtung.

5. Das Vorzeichen der elektrischen Ladung – eine Konvention

In den Betrachtungen der vorangehenden Abschnitte spielte eine Konvention eine Rolle, von der bisher noch nicht die Rede war: Das Vorzeichen der elektrischen Ladung selbst ist durch eine Konvention festgelegt, die man z.B. so formulieren kann: “Die Ladung, die man auf einem Glasstab durch Reiben mit einem wollenen Tuch erzeugt, wird als positiv festgelegt.” Als moderner Mensch würde man vielleicht lieber sagen: “Die Ladung der Atomkerne wird als positiv festgelegt”.

Beide Festlegungen sind zwar praktisch brauchbar, könnten aber im Prinzip durchaus zum falschen Ergebnis führen. Ein Antimensch (wir meinen einen Menschen, der aus Antimaterie besteht), der auf einem Antiplaneten wohnt und der diese Konvention liest, würde durch sie nämlich zum falschen Schluß gelangen. Er sitzt sozusagen nicht in demselben elektrischen Koordinatensystem (oder Bezugssystem) wie wir.

Wir wollen auf diese unwahrscheinliche Situation nicht durch eine verschärfte Neuformulierung unserer Konvention über das Vorzeichen der elektrischen Ladung Rücksicht nehmen. Bei der entsprechenden Konvention über das Vorzeichen des Impulses werden wir aber um die Festlegung des Bezugssystems nicht herumkommen.

Wir hatten in Abschnitt 3 an Hand von Abb. 5 auf die Stromrichtung geschlossen. Wir sehen jetzt, daß die Stromrichtung an der Konvention über das Koordinatensystem der elektrischen Ladung hängt. Wäre nämlich die Ladung von Körper A als negativ definiert worden und die von Körper B als positiv, so folgte, daß der Strom von B nach A fließt. Wir können also die folgende Regel formulieren:

> Die Stromrichtung hängt von dem durch Konvention festgelegten Vorzeichen der elektrischen Ladung ab.

6. Die Richtung des Impulsstroms

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, die in der Einleitung gestellte Frage zu beantworten: “In welcher Richtung fließt der Impulsstrom in Abb. 1?”

Bei der elektrischen Ladung mußte zunächst das (eindimensionale) Koordinatensystem, in dem die elektrische Ladung gemessen wird, durch Konvention festgelegt werden. Entsprechend müssen wir beim Impuls als erstes das Koordinatensystem festsetzen, in dem wir den Impuls messen wollen. Dieses ist, wie der Impuls selbst, dreidimensional und im Ortsraum orientiert. Außer der Orientierung müßte eigentlich auch noch der “Bewegungszustand” des Bezugssystems festgelegt werden, oder besser der Nullpunkt des Impulses auf den drei Achsen (Beim elektrischen Bezugssystem hatten wir diese Wahlfreiheit nicht). Für die Überlegungen dieses Aufsatzes spielt aber die Wahl des Nullpunkts keine Rolle.

Im Gegensatz zum elektrischen Bezugssystem, das man allgemein verbindlich festgelegt hat, wählt man das mechanische, also das Impuls-Bezugssystem von Fall zu Fall anders. Man orientiert die Impulsachsen so, daß die Beschreibung des betrachteten Problems möglichst einfach wird. Welche Seite einer Koordinatenachse die positive und welche die negative ist, folgt gewissen Gewohnheiten. Eine waagrecht liegende Achse bezeichnet man bekannterweise als x-Achse und ihre rechte Seite als die positive. Bei der senkrechten z-Achse sind sich wieder Theoretiker und Experimentalphysiker nicht einig. Bei den Theoretikern ist wie in diesem Heft oben positiv, bei den Experimentalphysikern unten. Nach solchen willkürlichen Festlegungen folgt die Richtung des Impulsstroms zwangsläufig. Um das zu sehen, beschränken wir uns zunächst auf Probleme, bei denen nur die x-Komponente des Impulses eine Rolle spielt.

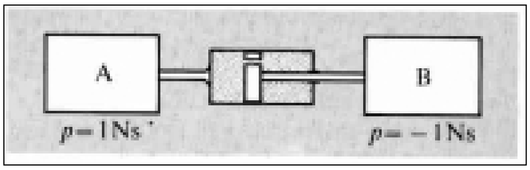

Abb. 9 Der Impuls von Körper A nimmt ab, der von Körper B zu. Es fließt also ein Impulsstrom durch den Stoßdämpfer von links nach rechts.

Das zu Abb. 5 analoge mechanische Bild zeigt Abb. 9. Körper A hat positiven Impuls, er bewegt sich nach rechts, Körper B hat negativen, er bewegt sich nach links. A und B sind über eine Stange und einen Stoßdämpfer (einen “Impulswiderstand”) miteinander verbunden. Der Impuls von A nimmt ab, der von B zu (Abb. 10), also fließt durch die Stange Impuls von A nach B, von links nach rechts. Bei der Anordnung von Abb. 11 fließt der Impuls in die entgegengesetzte Richtung: von rechts nach links.

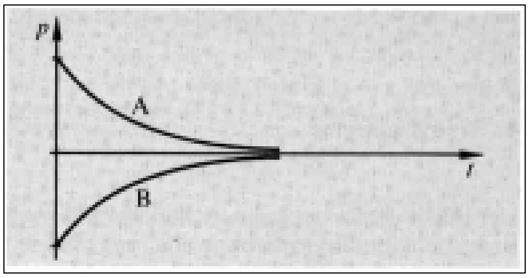

Abb. 10 Der Impuls der Körper A und B in Abb. 9 als Funktion der Zeit

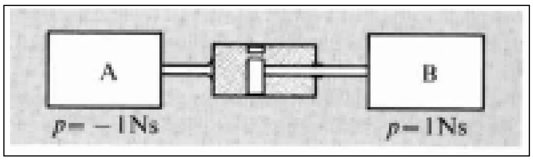

Abb. 11 Der Impuls von Körper B nimmt ab, der von Körper A zu. Der Impulsstrom fließt hier von rechts nach links.

In welche Richtung der Impuls in der Stange fließt, kann man nicht nur aus der Änderung des Impulses der Körper A und B schließen, man kann es auch direkt dem Spannungszustand der Stange entnehmen: Steht sie unter Druckspannung, so fließt der Impuls in die positive x-Richtung, steht sie unter Zugspannung, so fließt er in die negative x-Richtung. Wir wollen dieses Resultat auf beliebige Koordinatenrichtungen i verallgemeinern (wo i für x, y oder z steht):

> Durch einen in i-Richtung orientierten Impulsleiter fließt i-Impuls in die positive i-Richtung, wenn der Leiter unter Druckspannung steht, und in die negative i-Richtung, wenn der Leiter unter Zugspannung steht.

Da Seil und Feder in Abb. 1 unter Zugspannung stehen, fließt der Impuls oben von rechts nach links. Folglich fließt er im linken Teil der Halterung nach unten, im rechten nach oben und im unteren Teil der Halterung von links nach rechts, Abb. 12. Man erkennt jetzt auch, wodurch die Symmetrie dieser Anordnung zerstört wurde: durch die Auszeichnung einer Raumrichtung als positive Impulsrichtung. Hätten wir den Impuls nicht nach rechts, sondern nach links positiv gezählt, so wäre auch die entgegengesetzte Impuls*strom*richtung herausgekommen.

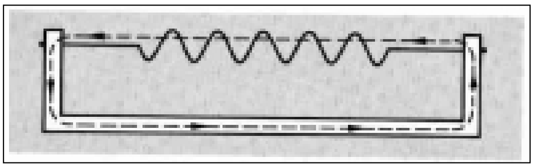

Abb. 12 Der Impulsstrom in der Anordnung der Abb. 1 fließt oben nach links und unten nach rechts. Die Zerstörung der Symmetrie beruht auf der Auszeichnung einer Raumrichtung als positive Impulsrichtung.

7. Beispiele

Die Abbildungen 13 und 14 zeigen an Hand einiger Beispiele den Weg des Impulsstromes. In allen 4 Teilbildern von Abb. 13 wird der Körper nach rechts beschleunigt, d.h. sein *x*-Impuls nimmt zu. Folglich fließt durch die Zuleitung, gleichgültig, ob sie von rechts, von links, von oben oder unten kommt, ob sie gerade oder verbogen ist, *x*-Impuls in den Körper hinein.

In den Abbildungen ist der Weg des *x*-Impulses durch eine einzige, das ganze Stromlinienfeld repräsentierende gestrichelte Linie angedeutet. Wir werden im folgenden Aufsatz sehen, daß das komplette Stromlinienbild viel komplizierter aussehen kann. In dem Fall, daß der Impulsleiter unter Biegespannung steht, werden in ihm nämlich Kreisströme "angeworfen", zusätzlich zu dem Impulsstrom, der durch den Leiter vom einen Ende bis zum anderen hindurchfließt.

Die Körper in Abb. 14 werden in *x*-Richtung verzögert oder in die negative x-Richtung beschleunigt, ihr *x*-Impuls nimmt also ab. Folglich fließt durch die Zuleitung in beiden Fällen *x*-Impuls aus den Körpern heraus.

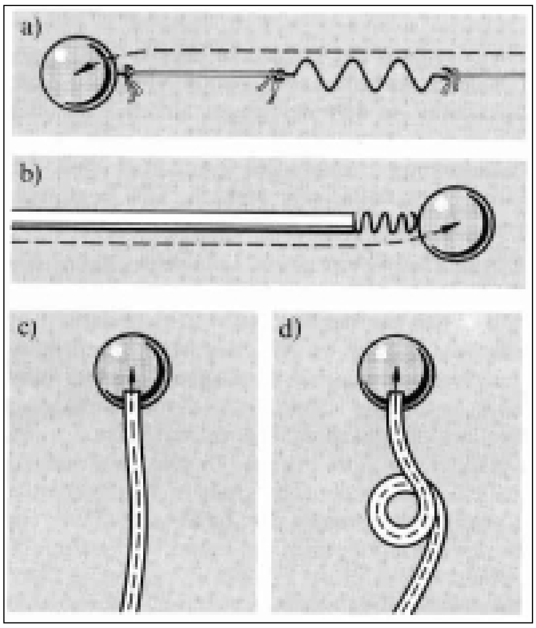

Abb. 13 In allen vier Teilbildern fließt durch die Leitung *x*-Impuls in den Körper hinein.

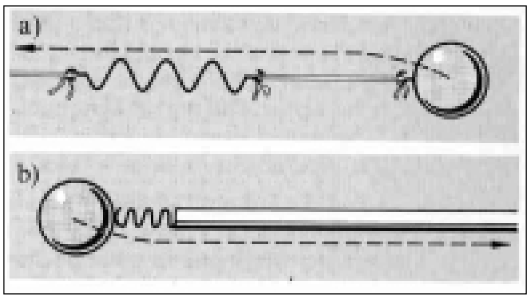

Abb. 14 In beiden Teilbildern fließt durch die Leitung *x*-Impuls aus dem Körper heraus.

8. Die drei Impnlssorten

Bisher wurden nur Situationen betrachtet, bei denen Ströme einer einzigen Komponente des Impulses auftraten. Wir wollen nun unsere Überlegungen verallgemeinern. Um zu sehen, mit welcher Art Mathematik man es dabei zu tun hat, sind in Tabelle 1 elektrische und mechanische Größen gegenübergestellt.

Tabelle 1

mengenartige Größe	Q Skalar	$\boldsymbol{p}$ Vektor
Strom dieser Größe	I_Q Skalar	$\boldsymbol{I_p}$ Vektor
Stromdichte	$\boldsymbol{j_p}$ Vektor	$\mathbf{j}_{\boldsymbol{p}}$ Tensor

Da in der Mechanik die strömende Größe, nämlich der Impuls, ein Vektor ist, ist auch die Stromstärke ein Vektor. Man identifiziere die Richtung dieses Vektors auf keinen Fall mit der Stromrichtung! Die Stromrichtung ist ja, wie wir gesehen haben, die Richtung eines Stromdichtevektors.

Nach Tabelle l ist die Stromdichte beim Impuls aber kein Vektor, sondern ein Tensor. Dieser Tensor 2. Stufe ist in der Mechanik in traditioneller Darstellung als "Spannungstensor" bekannt. Aus der Feststellung, daß $\mathbf{j}_{\boldsymbol{p}}$ ein Tensor ist, scheint zu folgen, daß eine einfache Darstellung des Impulsflusses durch Stromlinien, so wie sie in den beiden vorigen Abschnitten entwickelt wurde, dann nicht mehr möglich ist, wenn "mehrdimensionale" Impulsströme auftreten, d.h. Impulsströme, bei denen mehr als eine Komponente von Null verschieden ist. Man könnte befürchten, daß die Darstellung eines Tensorfeldes zwangsläufig so unanschaulich ist, daß man ihr das Strömen gar nicht mehr ansieht. Tatsächlich kann man aber auch ein Tensorstromdichtefeld sehr anschaulich darstellen, wenn man nur eine Vorsichtsmaßregel beachtet. Wenn man nämlich ein einmal gewähltes Koordinatensystem konsequent beibehält, kann man das Strömen der vektöriellen Größe $\boldsymbol{p}$ beschreiben als ein Strömen der drei voneinander unabhängigen skalaren Größen p_x, p_y und p_z. Zu jeder dieser Größen gibt es einen Strom mit einer skalaren Stromstärke I_{p_x}, I_{p_y} bzw. I_{p_z} und einer vektoriellen Stromdichte $\boldsymbol{j}_{p_x}$, $\boldsymbol{j}_{p_y}$ bzw. $\boldsymbol{j}_{p_z}$. Jeder der drei Ströme ist mathematisch von derselben Natur wie der elektrische Strom. Die drei "Vektoren" $\boldsymbol{j}_{p_x}$, $\boldsymbol{j}_{p_y}$ bzw. $\boldsymbol{j}_{p_z}$ sind die Zeilen des Stromdichtetensors.

Wir wollen einige Beispiele betrachten. Abb. 15a zeigt einen Körper, der über ein Seil nach rechts oben beschleunigt wird. Sowohl die *x*- als auch die *y*-Komponente des Impulses des Körpers nimmt also zu. Daraus folgt, daß durch das Seil sowohl *x*-Impuls als auch *y*-Impuls in den Körper fließt. Durch das Seil fließen also zwei Ströme. Ihre Stromdichtefelder sind geometrisch gleich und haben dieselbe Orientierung.

Im Beispiel von Abb. 15b wird ein Körper nach rechts unten beschleunigt, sein *x*-Impuls nimmt zu, sein *y*-Impuls dagegen ab. Hier haben die Stromdichtefelder wieder dieselbe Form, sie sind aber entgegengesetzt orientiert.

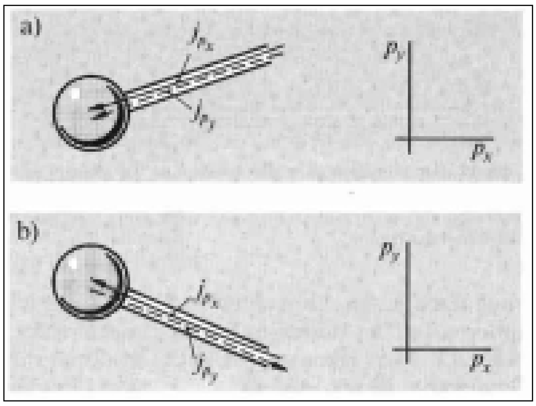

Abb. 15 In beiden Teilbildem steht die Impulsleitung unter Zugspannung. In a) fließen sowohl *x*- als auch *y*-Impuls zum Körper hin. In b) fließt *x*-Impuls in den Körper hinein und *y*-Impuls aus aus dem Körper heraus.

Abb. 16 zeigt einen Körper, der in *x*-Richtung unter Druck- und in *y*-Richtung unter Zugspannung steht. Auch durch ihn fließen ein *x*- und ein *y*-Impulsstrom hindurch. Die beiden Stromdichtefelder stehen aber hier senkrecht aufeinander.

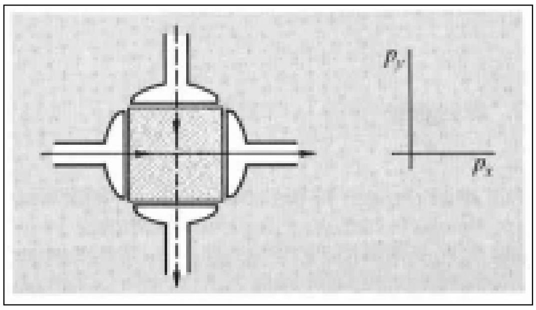

Abb. 16 Ein würfelförmiger Körper steht in *x*-Richtung unter Druck- und in *y*-Richtung unter Zugspannung. Die *x*- und die *y*-Impulsstromlinien stehen senkrecht aufeinander.

Die Mechanik der Tragwerke, die das Thema des nächsten Aufsatzes ist, befaßt sich mit dem Spezialfall, in dem der Impuls durch Seile oder durch Stäbe fließt, die nur auf Druck oder Zug in Stabrichtung beansprucht sind. Hier sind die Stromdichtefelder sehr einfach: Die Feldlinien verlaufen alle parallel zum Stab bzw. zum Seil.

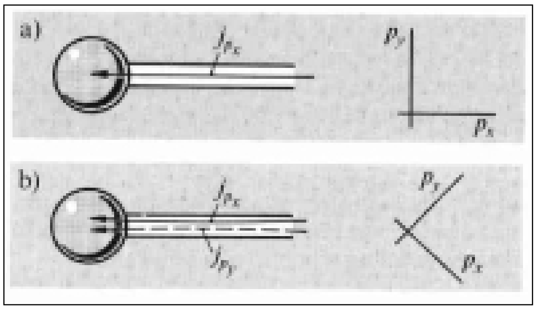

Abb. 17 Derselbe Sachverhalt ist in zwei verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt. Die Stromdichtefelder sind nicht invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems.

Unsere Darstellung eines Tensorfeldes durch drei Vektorfelder soll nicht darüber hinwegtäuschen, daß es sich hier bei den Stromdichtefeldern nicht um Vektorfelder im Sinn der Mathematik handelt. Wäre das der Fall, so müßten die Felder invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems sein. Daß sie das nicht sind, zeigt ein Vergleich von Abb. 17a mit 17b. Die Abbildungen stellen denselben Sachverhalt in verschiedenen Koordinatensystemen dar. In Abb. 17a fließt ein starker *x*-Impulsstrom, während die *y*-Impulsstromstärke Null ist. In Abb. 17b dagegen fließt ein *x*- und ein gleichstarker *y*-Impulsstrom. Beide sind dem Betrage nach kleiner als der *x*-Impulsstrom in Abb. 17a. Bei Drehungen des Koordinatensystems verändert sich also jedes Stromdichtefeld auf Kosten der beiden anderen. Die Beschreibung eines Tensors durch 3 Vektoren entspricht der Beschreibung eines Vektors durch drei Skalare, seine Komponenten.

9. Die Richtung des Stromstärkevektors

Wir haben gesehen, daß die Stromstärke des Impulses ein Vektor ist. Welche Richtung hat dieser Vektor für einen Impulsstrom, der durch einen Stab fließt, etwa den der Abb. 18a? Diese Frage nach der Richtung des Stromstärkevektors ist äquivalent zur Frage nach den Vorzeichen der drei Komponenten des Vektors $\boldsymbol{I_p}$ oder nach den Vorzeichen der drei Teilstromstärken I_{p_x}, I_{p_y} und I_{p_z}. Wie wir in Abschnitt 2 gesehen haben, kann man aber das Vorzeichen eines skalaren Stroms nur in Bezug auf eine orientierte Fläche angeben. Die oben gestellte Frage nach der Richtung des Stromstärkevektors ist also gar keine sinnvolle Frage. Eine beantwortbare Frage könnte dagegen lauten: "Welche Richtung hat die Stärke des Impulsstroms durch die Fläche $\boldsymbol{S}$ in Abb. 18b?" Die Antwort auf diese Frage findet man durch komponentenweise Betrachtung:

$$I_{p_x} = \int_S \boldsymbol{j}_{p_x} d\boldsymbol{A}$$

$$I_{p_y} = \int_S \boldsymbol{j}_{p_y} d\boldsymbol{A}$$

Beide Stromdichtefelder $\boldsymbol{j}_{p_x}$ und $\boldsymbol{j}_{p_y}$ haben die zu $\boldsymbol{S}$ entgegengesetzte Richtung, folglich ist sowohl $I_{p_x} < 0$ als auch $I_{p_y} < 0$. DerVektor $\boldsymbol{I_p}$ weist damit nach links unten. Hätten wir die Bezugsfläche $\boldsymbol{S}$ umgekehrt gewählt, so wäre die Stromstärke ein nach rechts oben weisender Vektor.

Beschränken wir die Wahl unseres Flächennormalenvektors auf die beiden Fälle, in denen er parallel zum Seil liegt, also entweder nach rechts oben weisend oder nach links unten, so können wir die folgende Regel formulieren:

> In einem Stab oder Seil unter Zugspannung weist der Stromstärkevektor in die entgegengesetzte Richtung wie der Normalenvektor der durchströmten Fläche.

Entsprechend gilt:

> In einem Stab unter Druckspannung weist der Stromstärkevektor in dieselbe Richtung wie der Normalenvektor der durchströmten Fläche.

In diesen Regeln kommt das zu ihrer Herleitung gewählte Koordinatensystem nicht mehr vor. Sie bleiben daher auch bei jeder anderen Wahl des Koordinatensystems gültig.

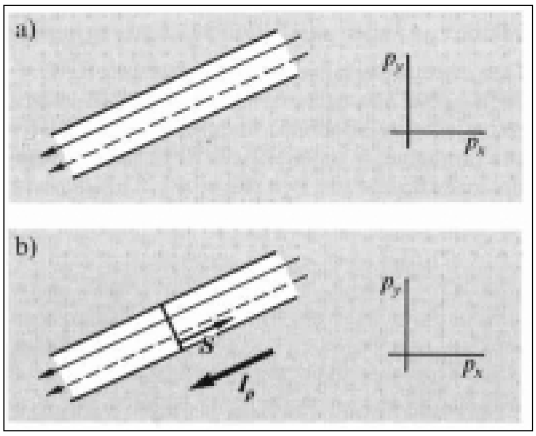

Abb. 18 Ohne Angabe einer orientierten Fläche ist die Richtung des Stromstärkevektors nicht definiert (a). Der zur F1äche ***S*** gehörende Stromstärkevektor weist nach links unten (b).