

## 用动量流方法解平面桁架内力问题<sup>①</sup>

陈 敦 华  
(绍兴柯岩中学)

### 摘 要

牛顿第二定律实质上是动量连续性方程的积分形式,因而,力可以被理解为动量流。本文将用动量流概念来解比较复杂的静力学问题。

关键词: 动量流; 动量流图

### 引 言

桁架是由一些杆件彼此在两端连接而组成的一种工程结构。铁路桥梁、油田井架、起重機、电视塔以及飞机的一些结构都采用桁架结构。在桁架的初步设计中,需要求出桁架在承受外载荷时各杆件的内力,作为确定截面尺寸和选用材料的参考。对于这个问题的解答,在一些常见的理论力学教材中,常采用节点法或截面法<sup>[1]</sup>。这两种方法都要列出许多个平衡方程,然后通过解这些联立方程来一一求出各杆件的内力,并从求出的力的正、负符号来确定杆件处于拉伸状态还是压缩状态。F.Herrmann 和 G.B.Schmid 等学者运用动量流概念,通过力学和电学间的类比,提出了一种新的解决静力学问题的方法—动量流法。他们用这一方法定性地描绘了静力结构的内力分布情况。本文将应用这一动量流方法,来定量地求解一些比较复杂的平面桁架的杆件的内力及其应力状态。

### 1 动量流

一般地,对于一个守恒量 A,在一定空间区域 R 中它一定满足连续性方程:

$$\frac{dA}{dt} + I_A = 0. \quad (1)$$

式中  $\frac{dA}{dt}$  为区域 R 中量 A 的变化率,  $I_A$  为流入(或流出)区域 R 的表面的 A 流。(1)式的一般解释为:在某一空间区域 R 的守恒量 A,只有当  $I_A$  穿过区域 R 的表面时才会发生变化。

<sup>①</sup>本文于1992年10月26日收到

物理学中的守恒量有能量、动量、电量等。在力学中，对于动量有

$$\frac{dp}{dt} + I_p = 0. \tag{2}$$

(2) 式的一般解释为：在某一空间区域 R 的动量，只有当动量流  $I_p$  穿过区域 R 的表面时才会发生变化。将 (2) 式与牛顿第二定律

$$\frac{dp}{dt} = F$$

比较，我们可以看到，力 F 等同于（负）动量流（momentum current）<sup>[2]</sup>： $F = -I_p$ 。因此，牛顿第二定律是动量的连续性方程。

对于一个静力学结构， $\frac{dp}{dt} = 0$ ，(2) 式变为

$$I_p = \sum_{i=1}^N I_p(i) = 0. \tag{3}$$

(3) 式类比于电学中的基尔霍夫第一定律。这就揭示了电学中的电量和力学中的动量之间的类比关系。

(3) 式表明，在一个静力学结构中，沿着 N 条通路穿过其区域 R 的（闭合）界面的净动量流等于零，即流入的动量流等于流出的动量流。

## 2 动量流图

我们来设想如图 1 所示的实验<sup>[3]</sup>，看动量流是如何从人的手流到箱子，再从箱子流回到人的。取从左向右的方向为正，则绳中伸长着的弹簧表示正的动量沿负方向流动，而两小车之间压缩着的弹簧表示正的动量沿正方向流动。

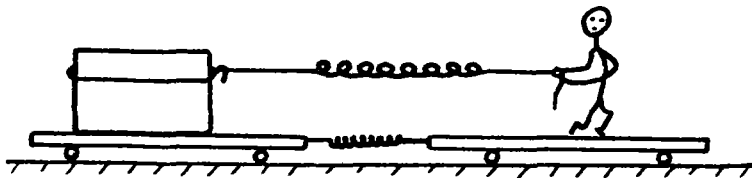


图 1. 演示动量流从人的手流到箱子，再从箱子流回到人。 图 1

物体中动量流的流动方向和物体的应力状态之间具有如下关系 (F. Herrmann and G.B. Schmid 1984) <sup>[4]</sup>：

当正 X (Y 或 Z) 动量在某一通路中沿负 X (Y 或 Z) 方向流动，通路处于拉伸状态；当正 X (Y 或 Z) 动量在某一通路中沿正 X (Y 或 Z) 方向流动，通路处于压缩状态。

动量通常在绳、杆、支座中流动。X (Y 或 Z) 动量在这些绳、杆、支座中的流动情况可以用与电学相同的方法 (如图 2) 来表示。我们把图 2 (b) 这种图叫做“流图” (flow diagram)。在这种图中，通过网络的电流被分解为几个互相叠加的电流回路。为了表示

通过“力学网络”中的动量流, 需要对  $p_x$ 、 $p_y$  和  $p_z$  三个动量分量画出三个动量流图 (momentum flow diagram)。对于平面力学结构, 只需画出两个动量分量的流图。

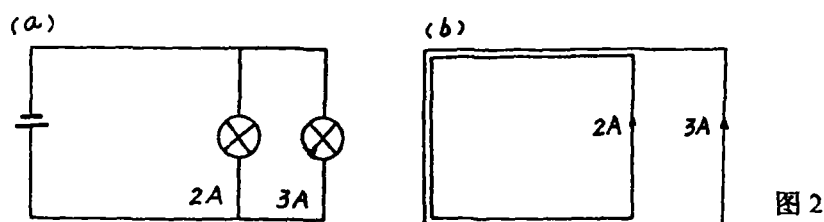


图 2. (a) 由电池和两个灯泡组成的电路。(b) 一种表示图 2 (a) 中电荷流动的方法。

下面我们来考虑图 3 起重机悬臂桁架的动量流图。

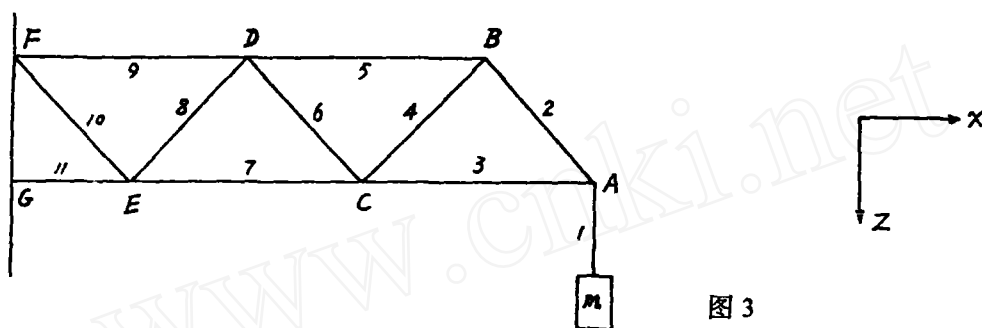


图 3. 起重机悬臂桁架。臂端悬挂一物体, 其质量为  $m$ 。斜杆和水平杆之间的夹角均为  $45^\circ$ 。

我们先来考虑  $Z$  动量流。设重力方向为  $Z$  的正方向。绳 1 处于拉伸状态, 这说明正的  $Z$  动量沿负  $Z$  方向从地球通过引力场流入物体, 再通过绳子流过节点  $A$ 。由于  $Z$  动量不能沿  $X$  方向流动, 故这动量只能流入杆件 2。这样,  $Z$  动量就沿斜杆先后流入节点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 最后流回大地。由于  $Z$  动量在流动过程中没有分叉, 所以流过每根斜杆的  $Z$  动量大小均相等。  $Z$  动量流图如图 4 (a) 所示。从图中可以看出, 桁架的  $A$  端是  $Z$  动量流的入口,  $F$  点是  $Z$  动量流的出口。根据前面提到的物体中动量流的流动方向和物体的应力状态的关系还可以知道, 杆 2、6、10 处于拉伸状态, 杆 4、8 处于压缩状态。

斜杆中将由  $Z$  动量流“感应”出  $X$  动量流。这里, 根据力的分解原理, 流过斜杆中的  $X$  动量流的大小均为  $I_{Px} = I_P \cos 45^\circ = I_{Pz} = mg$ 。设自左向右方向为正  $X$  方向, 则斜杆 2、6、10 中感应出的  $X$  动量流为  $+mg$ , 斜杆 4、8 中感应出的  $X$  动量流为  $-mg$ 。根据各斜杆的应力状态可知, 斜杆 2、6、10 中的  $X$  动量流的流动方向均向上, 而斜杆 4、8 中的  $X$  动量流的流动方向均向下。再根据  $X$  动量流的连续性, 可画出桁架的  $X$  动量流图, 如图 4 (b) 所示。从图中可以看出, 桁架  $F$  和  $G$  端既是  $X$  动量流的入口, 又是  $X$  动量流的出口。由于正  $X$  动量向负  $X$  方向流动和负  $X$  动量向正  $X$  方向流动都使物体处于拉伸状态, 故桁架上部的水平杆件均处于拉伸状态; 同理, 由于正  $X$  动量向正  $X$  方向流动和负  $X$  动量向负  $X$  方向流动都使物体处于压缩状态, 故桁架下部的水平杆件均处于压缩状态。

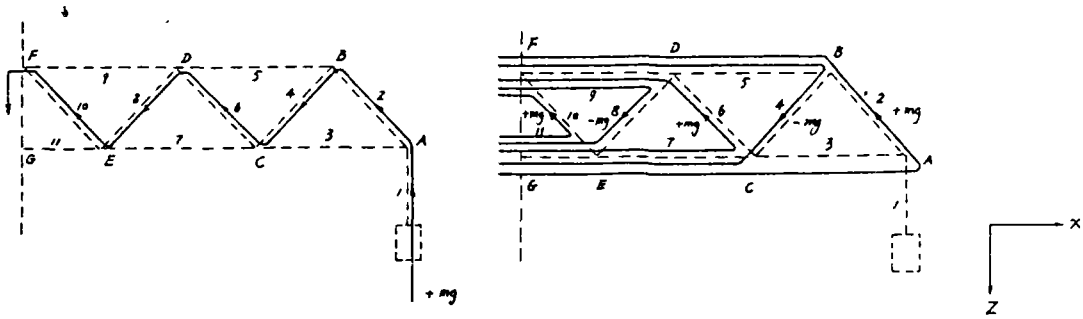


图 4. (a) Z 动量流图,

(b) X 动量流图.

### 3 应用举例

动量流图不但可以帮助我们形象地表示桁架中各杆件的应力状态, 而且还可以定量地求出各杆件的内力.

在图 3 所示的起重机悬臂桁架中, 根据桁架中 Z 动量流的流动情况, 可以看出每一杆件的内力 (动量流) 的 Z 分量为

$$\begin{aligned} I_{Pz1} &= mg, & I_{Pz4} &= mg, & I_{Pz7} &= 0, & I_{Pz10} &= mg, \\ I_{Pz2} &= mg, & I_{Pz5} &= 0, & I_{Pz8} &= mg, & I_{Pz11} &= 0. \\ I_{Pz3} &= 0, & I_{Pz6} &= mg, & I_{Pz9} &= 0, \end{aligned}$$

同理, 根据桁架中 X 动量流的流动情况, 可以看出每一杆件的内力的 X 分量为

$$\begin{aligned} I_{Px1} &= 0, & I_{Px4} &= mg, & I_{Px7} &= 3mg, & I_{Px10} &= mg, \\ I_{Px2} &= mg, & I_{Px5} &= 2mg, & I_{Px8} &= mg, & I_{Px11} &= 5mg. \\ I_{Px3} &= mg, & I_{Px6} &= mg, & I_{Px9} &= 4mg, \end{aligned}$$

这里, 比如水平杆件 5, 虽然通过它的两个 X 动量流的流动方向刚好相反, 但由于这两个动量流都使杆 5 处于拉伸状态, 因而, 这两个动量流不能相互抵消, 杆 5 的内力为 2mg. 其他水平杆件的情况也同样如此.

根据力的合成法则可知, 每一杆件的总动量流  $I_P = \sqrt{I_{Px}^2 + I_{Pz}^2}$ , 即每一杆件的内力大小为

$$\begin{aligned} I_{P1} &= mg, & I_{P7} &= 3mg, \\ I_{P2} &= \sqrt{2}mg, & I_{P8} &= \sqrt{2}mg, \\ I_{P3} &= mg, & I_{P9} &= 4mg, \\ I_{P4} &= \sqrt{2}mg, & I_{P10} &= \sqrt{2}mg, \\ I_{P5} &= 2mg, & I_{P11} &= 5mg. \\ I_{P6} &= \sqrt{2}mg, \end{aligned}$$

下面再举几个用动量流图求平面桁架内力的例子.

(一) 在图 5 (a) 所示的平面桁架中, E 端挂有重量为 P 的物体. 其 X 动量流图如

图 5 (b) 所示, Y 动量流图如图 5 (c) 所示。图中杆 5 的动量流为零, 这是由于由 A 端流入杆 6 的 X 动量流的大小为  $2P$  (根据力矩平衡条件  $\sum m_B = 0$ ), 而杆 2 由 Z 动量流  $P$  所感应出的 X 动量流也为  $2P$ , 故 X 动量流从 A 点流入杆 6, 在 C 点没有分叉, 直接通过杆 1、2、4 流向 B 点, 因而杆 5 中无 X、Z 动量流。

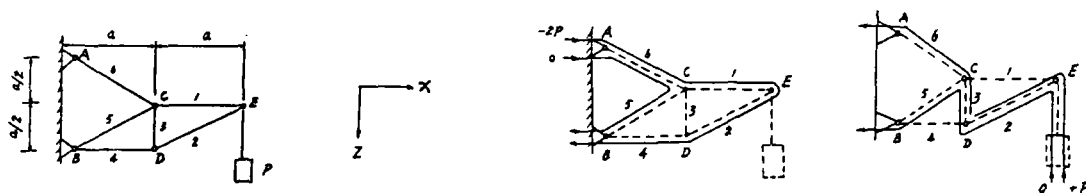


图 5. (a) 平面桁架。E 端挂有重量为  $P$  的物体。 (b) X 动量流图。 (c) Z 动量流图。

根据图 5 (b)、(c) 所示的 X、Z 动量流图, 可以看出每一杆件的内力的 X、Z 分量为

$$\begin{aligned} I_{Px1} &= 2P, & I_{Px4} &= 2P, & I_{Px2} &= 0, & I_{Px3} &= 0, \\ I_{Pz1} &= 2P, & I_{Pz5} &= 0, & I_{Pz2} &= P, & I_{Pz3} &= 0, \\ I_{Pz3} &= 0, & I_{Pz6} &= 2P; & I_{Pz4} &= P, & I_{Pz5} &= P, \end{aligned}$$

从而可知每一杆件的内力和应力状态为

$$\begin{aligned} I_{P1} &= 2P(\text{拉力}), & I_{P4} &= 2P(\text{压力}), \\ I_{P2} &= \sqrt{5}P(\text{压力}), & I_{P5} &= 0, \\ I_{P3} &= P(\text{拉力}), & I_{P6} &= \sqrt{5}P(\text{拉力}). \end{aligned}$$

(二) 在图 6 (a) 中, 外力  $F_1$  和  $F_2$  分别为  $40\text{kN}$  和  $10\text{kN}$ 。其 X、Z 动量流图分别如图 6 (b) 和 6 (c) 所示。

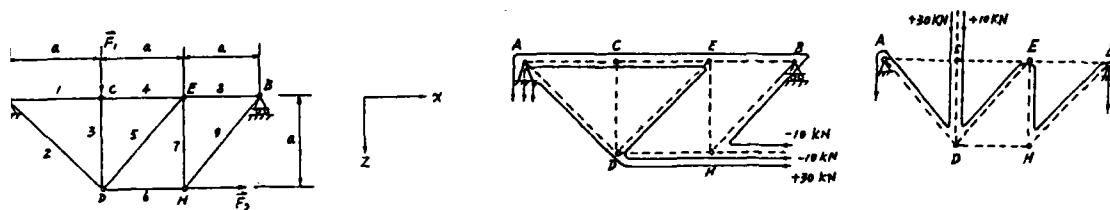


图 6. (a) 平面桁架。外力  $F_1$  和  $F_2$  分别为  $40\text{kN}$  和  $10\text{kN}$ 。 (b) X 动量流图。 (c) Z 动量流图。

根据图 6 (b)、(c) 所示的 X、Z 动量流图, 可以看出每一杆件的内力的 X、Z 分量为

$$\begin{aligned} I_{Px1} &= 20\text{kN}, & I_{Pz1} &= 0, \\ I_{Px2} &= 30\text{kN}, & I_{Pz2} &= 30\text{kN}, \\ I_{Px3} &= 0, & I_{Pz3} &= 40\text{kN}, \\ I_{Px4} &= 20\text{kN}, & I_{Pz4} &= 0, \\ I_{Px5} &= 10\text{kN}, & I_{Pz5} &= 10\text{kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{Pz6} &= 20\text{kN}, & I_{Pz6} &= 0, \\
 I_{Px7} &= 0, & I_{Pz7} &= 10\text{kN}, \\
 I_{Pz8} &= 10\text{kN}, & I_{Pz8} &= 0, \\
 I_{Px9} &= 10\text{kN}; & I_{Pz9} &= 10\text{kN}.
 \end{aligned}$$

从而可知每一杆件的内力和应力状态为

$$\begin{aligned}
 I_{P1} &= 20\text{kN}(\text{压力}), & I_{P4} &= 20\text{kN}(\text{压力}), & I_{P7} &= 10\text{kN}(\text{压力}), \\
 I_{P2} &= 42.4\text{kN}(\text{拉力}), & I_{P5} &= 14.14\text{kN}(\text{拉力}), & I_{P8} &= 10\text{kN}(\text{压力}), \\
 I_{P3} &= 40\text{kN}(\text{压力}), & I_{P6} &= 20\text{kN}(\text{拉力}), & I_{P9} &= 14.14\text{kN}(\text{拉力}).
 \end{aligned}$$

(三) 在图 7 (a) 中, 在 G 端有一外力  $F = 10\text{kN}$ . 其 X、Z 动量流图分别如图 7 (b) 和 7 (c) 所示.

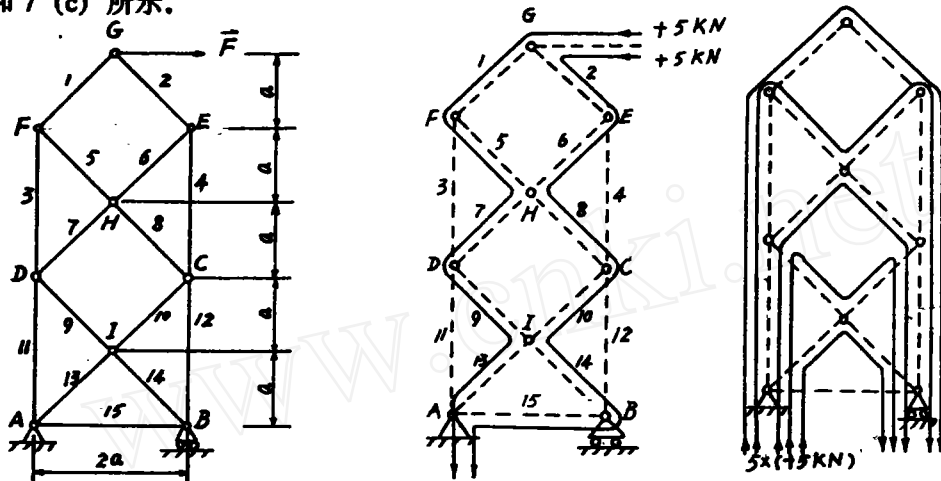


图 7. (a) 平面桁架. 外力  $F = 10\text{kN}$ . (b) X 动量流图. (c) Z 动量流图.

根据图 7(b)、(c) 所示的 X、Z 动量流图, 可以看出每一杆件的内力的 X、Z 分量为

$$\begin{aligned}
 I_{Px1} &= 5\text{kN}, & I_{Pz1} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px2} &= 5\text{kN}, & I_{Pz2} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px3} &= 0, & I_{Pz3} &= 10\text{kN}, \\
 I_{Px4} &= 0, & I_{Pz4} &= 10\text{kN}, \\
 I_{Px5} &= 5\text{kN}, & I_{Pz5} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px6} &= 5\text{kN}, & I_{Pz6} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px7} &= 5\text{kN}, & I_{Pz7} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px8} &= 5\text{kN}, & I_{Pz8} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px9} &= 5\text{kN}, & I_{Pz9} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px10} &= 5\text{kN}, & I_{Pz10} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px11} &= 0, & I_{Pz11} &= 20\text{kN}, \\
 I_{Px12} &= 0, & I_{Pz12} &= 20\text{kN}, \\
 I_{Px13} &= 5\text{kN}, & I_{Pz13} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px14} &= 5\text{kN}, & I_{Pz14} &= 5\text{kN}, \\
 I_{Px15} &= 5\text{kN}; & I_{Pz15} &= 0.
 \end{aligned}$$

从而可知每一杆件的内力和应力状态为

$$I_{P1} = 7.07\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P2} = 7.07\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P3} = 10\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P4} = 10\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P5} = 7.07\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P6} = 7.07\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P7} = 7.07\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P8} = 7.07\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P9} = 7.07\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P10} = 7.07\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P11} = 20\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P12} = 20\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P13} = 7.07\text{kN}(\text{拉力}),$$

$$I_{P14} = 7.07\text{kN}(\text{压力}),$$

$$I_{P15} = 5\text{kN}(\text{拉力}).$$

## 4 结束语

由于牛顿第二定律是动量的连续性方程的积分形式,力可以被看作为动量流。这不仅是名称上的不同。用动量流代替力这一名称,这可以使我们认识到,力学理论和电学理论在许多方面是可以相互类比的。本文用动量流解决平面桁架内力问题的方法就是通过力学和电学的类比而得到启发的结果。这一方法所得到的结论一方面给我们提供了形象地描述力学结构中的内力和应力状态的简单方法,另一方面揭示了力学和电学之间在本质上的—致性。

## 参 考 文 献

- 1 南京工学院,西安交通大学.理论力学(上册).人民教育出版社,1978.98
- 2 G.B.Schmid. An up-to-date approach to physics. Am.J.Phys. 52( 9), September 1984
- 3 F. Herrmann and G. B. Schmid. Analogy between mechanics and electricity. Eur. J. Phys. 6(1985). 16-21
- 4 F. Herrmann and G.B.Schmid. Statics in the momentum current picture. Am.J.Phys. 52(2), February 1984. 146-152

## Momentum Currents in Static Structures

Chen Minghua

### Abstract

Forces can be visualized as momentum currents, for Newton's Second Law is equivalent to the continuity equation for momentum in integral form. The purpose of the present paper is to solve problems of some more complex static structures in terms of momentum current.

**Key words:** momentum current; momentum flow diagram