

珠链喷泉中的动量流和能流

F. Herrmann 著, 陈敏华 译

德国卡尔斯鲁厄理工学院物理教育研究所, 德国 卡尔斯鲁厄 76128

摘要: 本文通过对珠链喷泉的模型建构, 用动量流和能流的概念定量地讨论了这一有趣的现象, 画出了珠链中的动量流图和能流图。

关键词: 珠链喷泉; 对流动量流; 传导动量流; 能流

中图分类号: G633.7

文献标识码: A

文章编号: 1003-6148(2016)11-0014-4

自从《纽约时报》上发表“珠链喷泉”(chain fountain)现象以来, 它至少已成为世界各地的物理学家们餐桌上讨论的话题之一^[1,2]。人们不只一次地要笔者用动量流来解释这一现象。确实, 珠链喷泉似乎注定要成为演示动量流概念的例子。

人们会问, 为什么珠链会上升, 即为什么它不直接从容器的边缘流出? 笔者将计算在没有能量耗散的情况下(除珠链撞击地面外)喷泉的高度, 如图1中所示的 h , 同时也将定义一个开始时各链的连接处无耗散的必要条件。

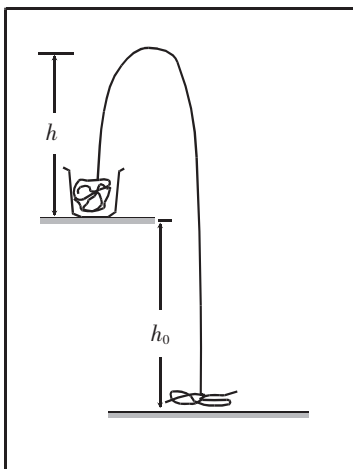


图1 符号约定

为此, 我们先分析其动量流, 然后再分析其能流。最后我们将讨论, 为了满足无耗散的条件, 开始时(或珠链连接处上跳时)的情况。

由于我们将多次提到珠链的构成, 我们将给出珠链连接处的设计情况, 如图2所示, 每个连接由一根杆组成, 在杆上固定着一个珠子。珠子携带着珠链的全部质量, 因而杆子被假定为无质量, 且可弹性地弯曲。杆与杆之间用铰链连接。每个珠子在杆子上的情况基本符合珠链喷泉的工作原理。这一点将在第3节中讨论。

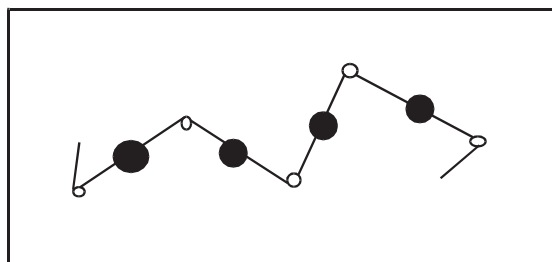


图2 珠链连接处的设计情况

1 动量流

根据需要, 我们只考虑动量的竖直分量(即 z 分量), 并规定向下为运动的正方向。

一支运动着的、处于拉伸状态的珠链传输着动量。其中, 有两种动量流: 对流动量流(convective current)和传导动量流(conductive current)。

收稿日期: 2016-08-07

基金项目: 本译文系浙江省教科规划 2013 年重点研究课题“传统物理课程的不足之研究: 课程考古学的方法”(SB067)的研究成果之一。

作者简介: F. 赫尔曼(F. Herrmann), 德国卡尔斯鲁厄理工学院物理教育研究所教授, 博士; 卡尔斯鲁厄物理课程教材作者; 在国际物理教育刊物上发表论文数篇; 曾多次来中国讲学。

译者简介: 陈敏华, 浙江省绍兴市鉴湖中学特级教师, 正高, 博士; 卡尔斯鲁厄物理课程教材中文译者; 曾在卡尔斯鲁厄理工学院物理教育研究所访问。

(1)对流动量流

对流动量流的提出基于每个珠子由于具有质量和速度因而具有动量这一事实。由于珠子在运动,所以动量随珠子一起流动。

传导动量流的提出基于杆子处于拉伸状态这一事实。这一动量流的分量与珠链的运动无关。它的强度等于我们通常所说的力。

我们可以认为,珠子携带着对流动量流,杆子携带着传导动量流。

我们设:

F_c =对流动量流,

F_s =传导动量流[下标“s”表示杆子(stick)]。

对流动量流等于速度和质量流 I_m 的乘积:

$$F_c = v \cdot I_m;$$

质量流可以写为:

$$I_m = \lambda \cdot v,$$

式中 λ 是单位长度珠链的质量。

这样,对流动量流可表示为:

$$F_c = v \cdot I_m = \lambda v^2.$$

珠链的每一位置具有相同的对流动量流的绝对值。在珠链的竖直部分(左右两部分)的动量流的方向均为竖直向下,如图 3 所示。在珠链的右部分,正的动量向下流动;在左部分,负的动量向上流动(等效于正的动量向下流动)。

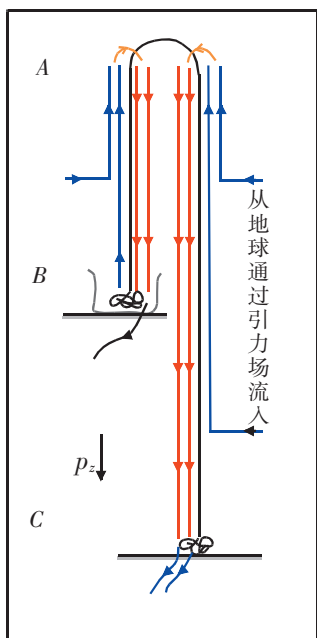


图 3 珠链竖直部分动量流示意图

珠链左右竖直部分的对流动量流(浅色部分)相等。用浅色表示的对流动量流向流,用深色表示的传导动量流向上流。在流的过程中,新

的动量流通过引力场从地球流入珠链。

(2)传导动量流

由于杆子处于拉伸状态,在左右两部分的杆子中的传导动量流的 z 分量均向上流,如图 3 所示。并且,在向上的方向上,其绝对值不断增大,这是因为在向上的方向上有动量通过引力场从地球流入珠子。每一长度 l 所增加的动量流为:

$$F_c/l = \lambda \cdot g.$$

在珠链右边的竖直段的最低端(即 C 点),传导动量流为零。在顶部(即 A 点),传导动量流为:

$$F_c = \lambda \cdot g \cdot (h_0 + h).$$

现在我们来分析珠链左边的竖直段。

在 U 形顶部转折处 A 点,珠链左右段之间没有相互交换的 z 动量流。在顶部,对流动量流和传导动量流的 z 分量均为零。因此,在这一点没有 z 动量流流过。由于这个原因,向下流动的对流动量流的绝对值等于向上流动的传导动量流的绝对值。我们来分析在珠链顶部(实际上在弯曲部分的下方)的传导动量流 $F_{s,A}$:

$$F_{s,A} = F_c = \lambda v^2.$$

在底部(即 B 点),传导动量流比 A 点的小 $\lambda \cdot g \cdot h$ 。因此,我们有:

$$F_{s,B} = F_{s,A} - \lambda \cdot g \cdot h = \lambda v^2 - \lambda \cdot g \cdot h.$$

到达 B 点的对流动量流 λv^2 必定流到了某处,然而,向上的传导动量流是不充足的。我们必须避免 λv^2 向上流,但只有 $(\lambda v^2 - \lambda \cdot g \cdot h)$ 向上流。这里有多余的部分 $\lambda \cdot g \cdot h$ 。如果没有其他动量流流出,这一项将为零, h 也将为零,珠链就不可能发生喷泉现象。额外的动量流只能流到盛珠链的容器中,最终流入地球(E)。珠链能产生喷泉现象的事实表明,这流出的动量是存在的。我们尚不知道这动量流 F_E 为什么和怎样离开珠链进入地球,但我们知道它必定等于

$$F_E = \lambda \cdot g \cdot h \tag{1}$$

在顶部 A 处,向上的动量是如何转变为向下的动量的?关于这一点,我们再说一句。这一过程并不刚好发生在所确定的高度,而是发生在珠链从竖直向水平开始弯曲的地方。

2 能流

我们可以用分解动量流的方法来分解珠链中的能流。

对流动量流伴随着动能一起流动:

$$P_{动} = \text{动能/时间} = (\text{动能/长度}) \cdot v =$$

$$\frac{\lambda}{2}v^2 \cdot v = \frac{\lambda}{2}v^3.$$

跟对流动量流一样,能流的这一分量在珠链各处具有相同的值。在珠链的左部分,它向上流,即与动量流的方向相反;在右部分,它向下流,即与动量流的方向相同,如图4所示。

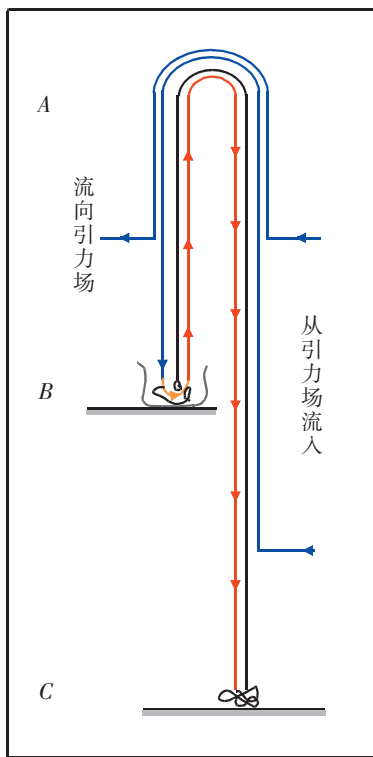


图4 珠链垂直部分能流示意图

能量从引力场流入珠链的右部分。在右部分,这能流向上流;在左部分,它向下流。因而,它的一部分流入珠链,然后流回引力场。它的剩余部分被用来加速珠子。然后,它以动能的形式与珠子一起流动,最后在C处(珠子与地面撞击处)耗散。

另外,能量通过杆子与传导动量流一起流动。它与传导动量流之间的关系为:

$$P_S = v \cdot F_S.$$

与传导动量流一样,它在向上的方向上逐渐增大。这是由于它与引力场之间有能量交换:在右部分,能量流入珠链;在左部分,能量从珠链流出。在长度 Δz 的那一段珠链上,流向引力场或从引力场流入的能量传输率为:

$$P_C = \lambda \cdot g \cdot \Delta z \cdot v.$$

我们来分析装置的上半部分。其长度为 $\Delta z = h$ 。在右边流入珠链的能流为:

$$P_{G\pm} = \lambda \cdot g \cdot h \cdot v.$$

在左边有相同的能流从珠链流出。对这两部

分能流,我们不感兴趣,因为它们对总能流没有贡献,它们仅仅穿过这个系统。我们感兴趣的是流入珠链右下部分的能流。它等于:

$$P_{G\mp} = \lambda \cdot g \cdot h_0 \cdot v.$$

该部分能流向上流,然后沿珠链向左转弯,再向下流,用于加速在容器B处的珠子。

3 耗散

珠子的加速过程可以被看作碰撞过程。运动部分的珠链与下一个容器中的珠子相连。它好比这样一个物体,其质量明显大于正在被加速的珠子的质量。

根据珠链连接处不同的设计情况,此碰撞过程(至少在理论上)可以被看成是弹性程度不同(从完全非弹性碰撞到完全弹性碰撞)的碰撞。

如果它是一个完全弹性碰撞过程,所有流入的能流全部用来给珠子加速:

$$\lambda \cdot g \cdot h_0 \cdot v = \frac{\lambda}{2}v^3.$$

由此,我们得到:

$$v^2 = 2gh_0.$$

如果它是一个完全非弹性碰撞,那么有一半能量耗散了。这个结论可从一个大质量物体与一个小质量物体的完全非弹性碰撞中求得。因此,在这种情况下,流入的能量中只有一半用于加速珠子:

$$\frac{\lambda}{2}gh_0v = \frac{\lambda}{2}v^3.$$

由此,我们得到:

$$v^2 = gh_0.$$

因此,我们得到总的结论为:

$$gh_0 \leq v^2 \leq 2gh_0.$$

这里我们忽略了其他能量损失或耗散。

4 各种不同类型的碰撞

下面我们来分析静止在水平地面上单独一链的情况。在某一瞬间,它将受到(在前一时刻已被加速的)旁边的一链所施加的向上的拉力。我们根据珠子在杆上的不同位置分几种情况来讨论。

首先,我们假定珠子在杆子的右端,如图5中的a所示。这时,珠子的速度就是珠链的速度。我们知道,这情况跟大质量物体与小质量物体的完全非弹性碰撞相同。在这一过程中有一半能量耗散了。然而,珠链的各部分都是弹性的,为何这个过程是完全非弹性的?即使初始的碰撞是部分

弹性的,有一半能量必定会流走,很可能由于碰撞而很快消失。结果,它必定以珠链的速度运动。这就意味着,有一半能量耗散了。

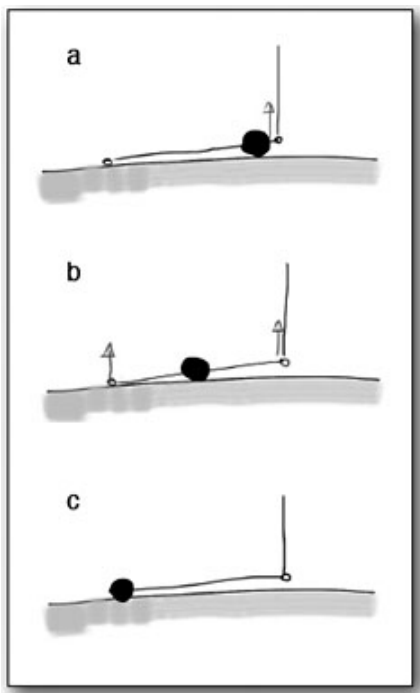


图 5 水平地面单独一链示意图

如果我们把珠子稍向远离铰链的方向移动,其碰撞后速度将变小,能量耗散也将变小。如果把它移到杆的中点,如图 5 中的 b 所示,它碰撞后的速度刚好等于珠链的运动速度,这时没有能量耗散。如果再将它向左移动,它碰撞后的速度将减小,碰撞又变成非弹性碰撞。当它靠近下一个铰链时,相应的碰撞为非弹性碰撞。只有当珠子处于杆的中间位置时,碰撞才是弹性的。

我们来看一个有趣的事实:角动量的作用。如果珠子被放在杆的中点,碰撞(运动珠链的拉动)

将导致杆转动。尽管其转动惯量很小(杆长珠子小),它不会转动。地球将阻止其转动。相同的动量从右端连接处流出,沿珠链向上流;它同样从左端连接处流向地球。

因此,珠子获得了相同数量的“负动量”。在这过程中,两份角动量流入杆子,并相互抵消。

最后,我们弄清了额外的动量流 F_E 的来源[见方程(1)]。这动量流决定了喷泉的高度:

$$F_E = \lambda \cdot g \cdot h_0$$

由此可以看出,传入珠子的一半动量流(通过珠链的传导动量流)向上流;另一半流向容器(或地球)。这两部分动量流都等于 $\lambda v^2/2$ 。因此,

$$\text{我们有: } \lambda gh = \frac{\lambda}{2} v^2,$$

$$\text{即 } h = \frac{v^2}{2g}.$$

在无能量耗散的情况下,我们有:

$$v^2 = 2gh_0,$$

喷泉的最大高度为:

$$h_{\max} = h_0.$$

实际上,不仅仅在我们所讨论的碰撞过程中有能量耗散。因此,我们可以给出喷泉的高度和速度的区间:

$$0 \leq h \leq h_0,$$

$$gh_0 \leq v^2 \leq 2gh_0.$$

参考文献:

[1]http://www.nytimes.com/2014/03/04/science/the-chain-fountain-explained.html?_r=0

[2]http://www.youtube.com/watch?annotation-id=annotation-625777&feature=iv&src_vid=-dQJBBklpQQ&v=6ukMld5fli0

(栏目编辑 赵保钢)