216 Das Zwillingsparadoxon im Unterricht?

ZUSAMMENFASSUNG

Das Zwillingsparadoxon fasziniert sowohl Wissenschaftler als auch Laien seit mehr als hundert Jahren. Diese Aufmerksamkeit hat es aber nicht verdient. Sie beruht auf einem ungeschickten Zugang zur Relativitätstheorie.

Gegenstand

Das Zwillingsparadoxon wird diskutiert in Schulbüchern, Hochschulbüchern und populärwissenschaftlichen Büchern. Es wurden hunderte von Artikeln in wissenschaftlichen Zeitschriften dazu veröffentlicht. Ja, es wurden sogar „Metaartikel“ geschrieben, d.h. Artikel, die versuchen die bisher erschienenen wissenschaftlichen Arbeiten zu klassifizieren und ihr Erscheinen in einem Histogramm darzustellen. Es ist nur ein kleines Thema, aber es wird offenbar für wichtig gehalten.

Hier kurz zur Erinnerung: Zwei Zwillinge – bei uns heißen sie Willy und Lilly – sind beieinander und gleichen ihre Uhren ab. Dann macht Lilly mit einem Raumfahrzeug eine lange Reise mit konstanter Geschwindigkeit zu einem fernen Stern; sie kehrt um und reist – wieder mit konstanter Geschwindigkeit – zurück. Beim erneuten Rendezvous mit Willy stellen die beiden fest, dass nach Willys Uhr mehr Zeit vergangen ist als nach Lillys. Willy ist mehr gealtert als Lilly. Abb. 1 zeigt die Weg-Zeit-Diagramme von Willy und Lilly, die so genannten Weltlinien.

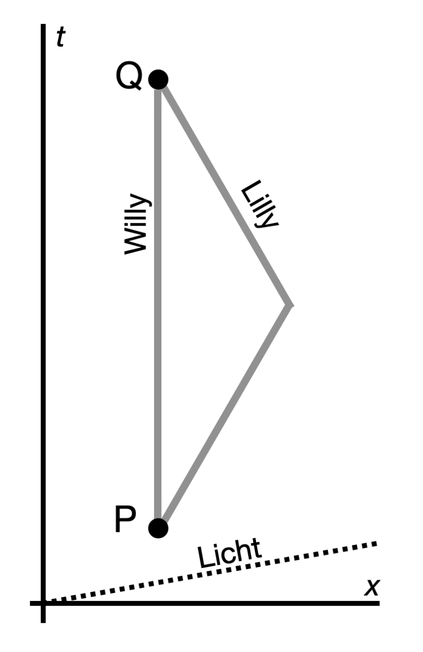

Abb. 1. Weltlinien von Willy und Lilly. Willy ist zwischen den Raumzeitpunkten R und Q immer „frei schwebend“, Lilly nicht.

Wenn beide, Willy und Lilly, davon ausgehen, dass wegen der „Zeitdilatation“ beim jeweils anderen weniger Zeit vergeht, scheint ein Widerspruch vorzuliegen.

Mängel

Ich gehe davon aus, dass Ihnen, liebe Leserin und lieber Leser, das Paradoxon bekannt ist. Es geht mir nicht darum, es aufzulösen. Das ist, weiß Gott, oft genug getan worden.

Vielmehr geht es mir um die Rolle, die das Thema in der Lehre von Schule und Hochschule spielt und spielen sollte.

Dazu möchte ich zunächst die Geschichte leicht verändert erzählen.

Willy und Lilly vergleichen ihre Uhren. Sie zeigen dasselbe an. Dann geht Lilly auf den Sportplatz, und Willy geht einkaufen. Am Abend treffen sie sich wieder und stellen fest, dass ihre Uhren nicht mehr übereinstimmen, Abb. 2.

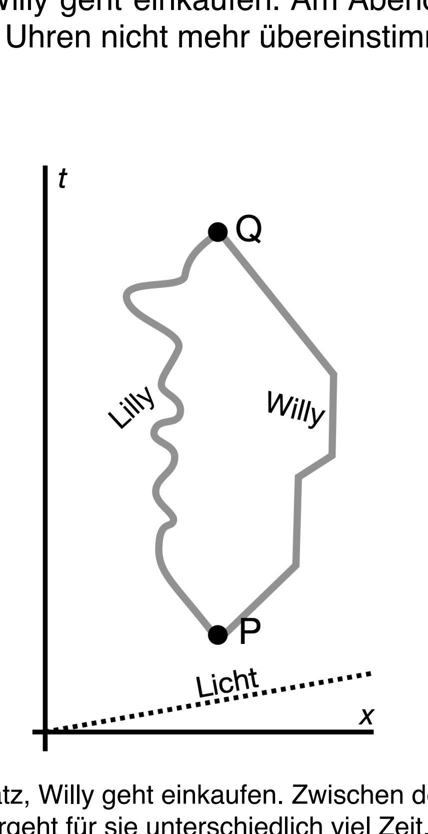

Abb. 2. Lilly geht zum Sportplatz, Willy geht einkaufen. Zwischen den beiden Raumzeitpunkten vergeht für sie unterschiedlich viel Zeit.

Natürlich ist die Geschichte unrealistisch; die Uhren gehen nicht genau genug. Aber als Gedankenexperiment taugt sie nicht weniger, als die übliche Geschichte, die ja auch nicht sehr realistisch ist. Sie hat gegenüber der traditionellen den Vorteil, dass sie nicht die Erwartung weckt, man könne die Beobachtung mit Hilfe einer Rechnung besser verstehen. Vielmehr bringt sie eine Tatsache zum Ausdruck, die wir als naturgegeben hinnehmen müssen: Raum und Zeit bilden eine Einheit.

Für das Verständnis hilft es nicht viel, wenn man den Zeitunterschied berechnet mit Hilfe mehrerer Formeln, die etwas beschreiben, was nicht weniger unplausibel ist als das Ergebnis der Uhrenablesung. Es bringt kaum etwas, wenn man versucht, den korrekten Wert des Alterungsunterschiedes der beiden Zwillinge zu begründen durch die Zeitdilatation für Willy, und eine Kombination aus Zeitdilatation und Beschleunigungseffekt für Lilly. Man kann lediglich nachrechnen, dass im Rahmen der Relativitätstheorie (im Folgenden RT), die man dazu natürlich kennen muss, alles seine Richtigkeit hat.

Wie unpassend ein solches Begründungs- und Erklärungsmuster vor allem für Anfänger ist, sieht man, wenn man eine weitgehend analoge Situation betrachtet, für die jeder eine gute Anschauung hat, die aber niemand als Paradoxon präsentieren würde.

Statt die beiden Dimensionen der Raumzeit (wir beschränken uns in der RT, wie üblich, auf eine einzige Raumdimension), betrachten wir zwei andere Dimensionen, deren Zusammenspiel uns vertrauter ist: die beiden horizontalen Komponenten des normalen Ortsraums. Es ist der Raum, in dem wir als an die Erdoberfläche gebundene Wesen ständig herumnavigieren.

Hier die Geschichte: Willy und Lilly fahren, jeder mit einem Auto, auf unterschiedlichen Wegen von einem Ort P zu einem Ort Q, Abb. 3. Willy fährt geradeaus, direkt von P nach Q. Lilly fährt fast immer geradeaus, nur hat ihr Weg einen Knick. Beide lesen am Anfang und am Ende der Fahrt ihren jeweiligen Kilometerzähler ab. Sie stellen fest, dass Lilly eine größere Strecke zurückgelegt hat.

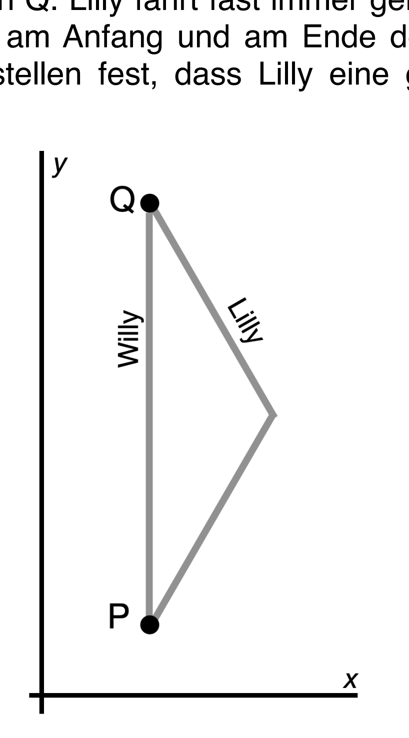

Abb. 3. Willy und Lilly fahren auf unterschiedlichen Wegen von P nach Q. Ihre Kilometerzähler zeigen, dass die zurück gelegten Wege nicht gleich sind.

Nehmen wir nun an, uns wäre nicht bewusst, dass die beiden Dimensionen vorwärts und seitwärts zwei Dimensionen ein und desselben Raumes sind, dann würde (in Analogie zum RT-Zwillingsparadoxon) das folgende Paradoxon entstehen: Willy stellt fest, dass Lilly eine größere Strecke zurücklegen muss, um so weit vorwärts zu kommen wie er selbst, Abb. 4a.

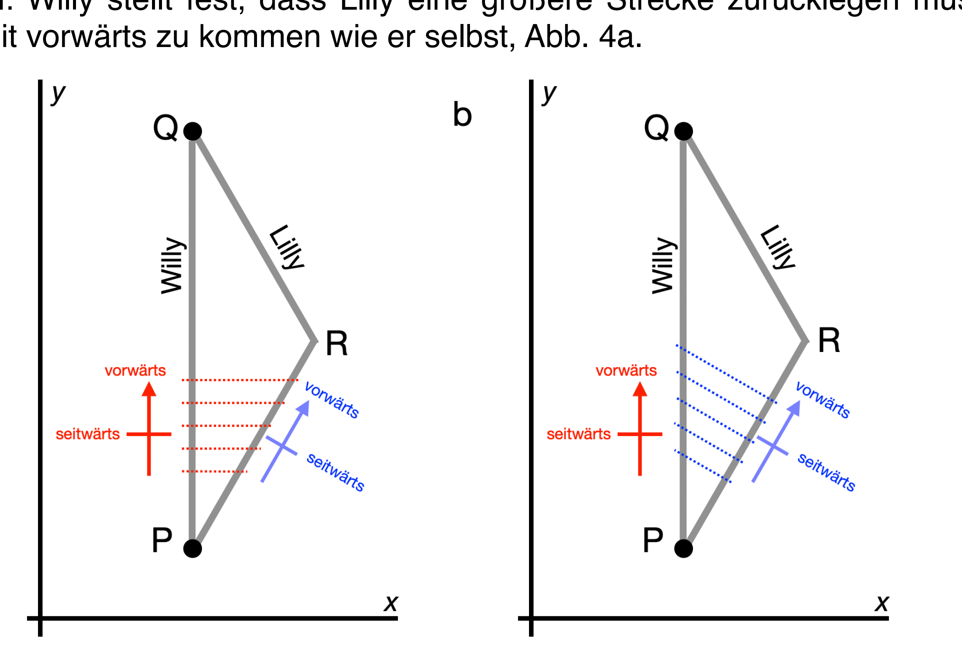

Abb. 4. (a) Willy stellt fest, dass Lilly eine längere Strecke fahren muss, um vorwärts zu kommen. (b) Lilly stellt fest, dass Willy eine längere Strecke fahren muss um vorwärts zu kommen.

Anscheinend unterliegt ihr Weg einer Längendilatation. Aber Lilly kommt zu demselben Schluss, Abb. 4b. Aus ihrer Sicht muss Willy eine größere Strecke zurücklegen, um so weit voranzukommen wie sie. Also: für jeden ist die Strecke des anderen länger. Das wäre das Paradoxon. Es kann natürlich nicht beides zutreffen. Und wenn sie auf ihre Kilometerzähler schauen, stellen sie auch fest: Für Willy war der Schluss richtig: Lilly legt eine größere Strecke zurück. Lillys Schluss war falsch.

Wenn man das Problem nun so diskutieren würde, wie es beim echten Zwillingsparadoxon üblich ist, so würde man die Frage untersuchen, welche Rolle die Richtungsänderung von Lilly im Punkt R spielt, und was sich ändert, wenn die Richtungsänderung nicht durch einen scharfen Knick geschieht, sondern in einem etwas sanfteren Bogen, und anderes mehr. Man würde feststellen, dass der Knick in Lillys Trajektorie zwar zur Deutung der Beobachtung notwendig ist, dass ein Knick aber generell nicht unbedingt einen großen Wegunterschied verursacht. In Abb. 5 hat Willys Trajektorie sogar drei Knicke, aber Lillys ist immer noch die längere.

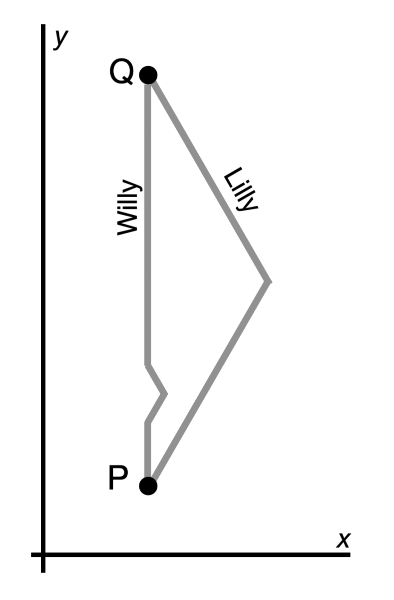

Abb. 5. Der Knick hat zwar etwas damit zu tun, dass die Wege unterschiedlich lang sind. Aber es gibt keinen einfachen Zusammenhang zwischen dem Winkel des Knicks und der durch den Knick verursachten Verlängerung des Weges.

Genau von dieser Art sind die Diskussionen, die man im Zusammenhang mit dem echten Zwillingsparadoxon führt: Spielt die Beschleunigung beim Umkehren eine Rolle? Ja und nein. Ohne Beschleunigung keine Auflösung des Zwillingsparadoxons, aber eine Beschleunigung gleich am Anfang wiederum bewirkt nichts.

Noch einmal zurück zu Abb. 3. Selbst wenn man den Wegunterschied berechnet hat, kennt man ihn nur für einen ganz speziellen Verlauf der Trajektorien. Wie steht es denn aber zum Beispiel bei den beiden Wegen der Abb. 6?

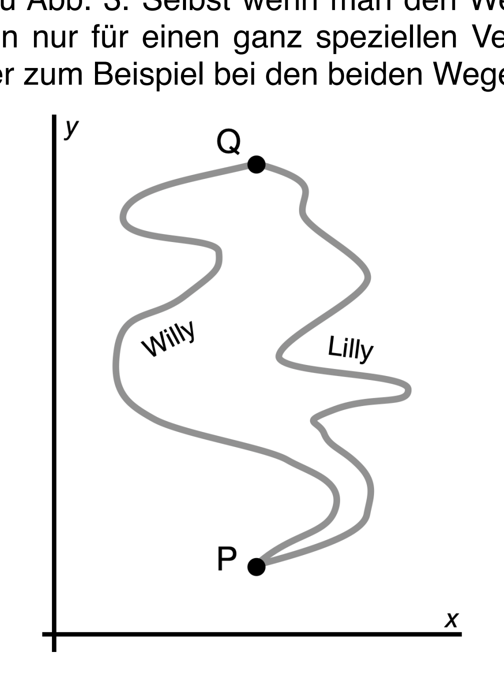

Abb. 6. Man möchte jemandem verständlich machen, dass die Wege von Willy und Lilly nicht gleich lang sind. Würde man dazu die Weglängen mithilfe der Differentialgeometrie berechnen?

Würde man auch hier den von Willy zurück gelegten Weg berechnen, indem man den von Lilly wahrgenommenen Fortschritt aufaddiert, dann aber noch berücksichtigt, welche Auswirkung die Richtungsänderung von Willy in jedem Augenblick auf das Ergebnis hat? Wohl eher nicht. Wie bekommt man ihn dann aber? Die Antwort ist einfach: Indem man ihn lokal misst, d.h. mit dem Kilometerzähler des jeweiligen Autos. Und man wundert sich natürlich nicht, dass die angezeigten Werte nicht übereinstimmen.

Genauso wollen wir auch die Situation von Abb. 2 beschreiben: Wir messen die „Zunahme“ der Zeit lokal, mit einer mitgeführten Uhr.

Herkunft

Den Effekt hat Einstein schon in seiner berühmten Arbeit von 1905 angesprochen, dort allerdings nicht als Paradoxon präsentiert.

Es ging beim Zwillingsparadoxon um eine für diese Zeit unerhörte Aussage. Die Einsteinsche Theorie stellte die bis dahin geltenden Grundüberzeugungen von Raum und Zeit in Frage.

Die Tatsache, dass Raum und Zeit eine Einheit, die Raumzeit, bilden, wurde erst nach und nach Normalität. Ein wichtiger Schritt dabei war die Arbeit von Minkowski. Hier zur Erinnerung sein berühmt gewordener Satz aus dem Jahr 1908:

> *Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.*

Man gewöhnte sich erst langsam an die Raumzeit und an die im Grunde einfache Tatsache, dass die Größen, die bisher Dreiervektoren waren, nun zu Vierervektoren wurden.

Obwohl in diesem Kontext ein Unterschied in der Anzeige der mitgeführten Uhren selbstverständlich ist, wurde der Effekt in die Geschichte mit den beiden Zwillingen gekleidet und zum Paradox erhoben und schon bald von vielen anderen bedeutenden Physikern diskutiert.

Und dann geschah das, was immer geschieht: Obwohl man die neue Physik viel direkter einführen könnte, ging man in der Lehre der RT den umständlichen historischen Weg nach, mit allen Details, die Einstein in seiner ersten Arbeit zu dem Thema anspricht: Uhrensynchronisation, Relativität der Gleichzeitigkeit, Längenkontraktion, Zeitdilatation.

Jeder Lernende und Studierende muss hier hindurch, und begegnet zwangsläufig auch dem Zwillingsparadoxon.

Und schließlich mag noch etwas anderes eine Rolle spielen: dass man glaubt, ein Verständnis nur dadurch zu erlangen, dass man etwas „durchrechnet“.

Entsorgung

Das ganze Problem löst sich auf in Wohlgefallen, wenn man von vornherein klar macht, dass Raum und Zeit eine Einheit bilden, die Raumzeit. Man orientiere sich etwa an Wheeler, der die Realität der Raumzeit sehr schön erklärt und zeigt, wie man ohne jegliches Koordinaten- oder Bezugssystem Raumzeitpunkte eindeutig festlegen kann [1].

Man halte sich vor allem auch an die Regel, die Wheeler formuliert, und an die er immer wieder erinnert: Die Physik ist nur dann einfach, wenn man ein Phänomen lokal beschreibt [2]:

> *Don’t try to describe motion relative to faraway objects. Physics is simple only when analyzed locally.*

Man vermeide also Fragen wie: Welche Zeit zeigt Lillys Uhr für Willy an. Denn sie muss natürlich genau lauten: Welche Zeit zeigt **jetzt** Lillys Uhr für Willy an. Und damit hat man das Problem: Aus jetzt für Willy kann man nicht auf ein jetzt für Lilly schließen.

Man lasse ab von dem Versuch, ein „jetzt“ für entfernte Orte zu definieren mit Hilfe von zu synchronisierenden Uhren. „Jetzt“ sollte man nur „hier“ verwenden.

In einem Unterricht für Fortgeschrittene führt man natürlich die Metrik der Raumzeit ein. Auch dabei wird offensichtlich, dass die Zwillingsgeschichte kein Paradoxon ist.

Aber auch für Anfänger gibt es kein Problem: Man erzählt die Geschichte, die zu Abb. 2 gehört und vergleicht die Situation mit der von Abb. 6. Man nimmt als Erfahrung hin, dass der frei schwebenden Bewegung die längste Zeit entspricht, der Bewegung mit der Grenzgeschwindigkeit, die Zeit null.

Auf keinen Fall mache man die Rechnerei im Bezugssystem von Lilly. Denn damit verstößt man gegen eine Regel, die man sonst überall in der Physik respektiert: Wähle dein Koordinaten- oder Bezugssystem so, dass die Behandlung des Problems möglichst einfach wird, und vor allem: Wechsle es nicht mitten in der Rechnung. Genau das tut man aber, wenn man das Zwillingsparadoxon formuliert und genau das ist die Ursache der chaotischen Diskussionen, die damit einhergehen.

[1] J. A. Wheeler, *Gravitation und Raumzeit*, Spektrum-der-Wissenschaft-Verlagsgesellschaft, Heidelberg, 1991, S. 67

[2] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, New York, 1973, S. 4.