185 Die fallende Katze

Zusammenfassung

Der Trick, mit dem es eine Katze schafft, immer auf den Beinen zu landen, ist nichts was nur Katzen können. Jeder Mensch kann es auch, ohne dass man ihm erklärt, wie es geht. Die Physik, die dahinter steckt, ist leicht zu verstehen.

Gegenstand

Man kennt die Geschichte mit der Katze. Sie wird beliebig orientiert in die Höhe geworfen oder auch einfach fallen gelassen: sie macht immer eine sanfte Landung auf ihren vier weit ausgestreckten Beinchen. Hat man etwas naturwissenschaftliche Bildung, mag man befürchten, dass hier mal kurz der Drehimpulssatz außer Kraft gesetzt wird. Wenn man bei Wikipedia nachsieht, etwa unter „Falling cat problem", erfährt man aber, dass alles mit rechten Dingen zugeht: „Die Lösung des Problems, ursprünglich von Kane und Scher, modelliert die Katze als zwei Zylinder, die ihre relative Orientierung ändern können. Später beschrieb Montgomery das Kane-Scher-Modell als eine Verbindung im Konfigurationsraum, das die durch die Physik erlaubten Relativbewegungen der beiden Teile der Katze einschließt. In dieser Art dargestellt ist die Dynamik des „falling cat problems" ein prototypisches Beispiel eines nicht-holonomen Systems, dessen Studium zu den zentralen Beschäftigungen der Kontrolltheorie gehört. … Physikalisch ausgedrückt ist Montgomerys Verbindung ein gewisses Yang-Mills-Feld auf dem Konfigurationsraum und ist ein Spezialfall eines allgemeineren Zugangs zur Dynamik deformierbarer Körper dargestellt durch Eichfelder…"

Mängel

Dass der Wikipedia-Eintrag als Satire gemeint ist, konnte ich nicht feststellen. Normalerweise würde er ja dann nach einiger Zeit rausfliegen.

Zunächst noch einmal kurz, worin das Problem besteht. Es wird offenbar als überraschend, wenn nicht als widersprüchlich empfunden, dass die Katze die Drehung schafft. Man hat das Gefühl, es gebe ein Problem mit dem Drehimpulserhaltungssatz. Scheinbar bestätigt wird diese Sorge, wenn man Erklärungen, wie die oben zitierte liest. Denn einfach scheint der Trick, den die Katze anwendet, nicht zu sein.

Und nun die Mängel:

1. Es handelt sich bei der Drehung nicht um eine besondere Fertigkeit von Katzen. Der Mensch und auch andere, einigermaßen bewegliche Tiere können es auch. Probieren Sie es selbst aus:

- Stellen Sie sich auf glattem Fußboden auf ein Bein (am besten mit glatten Schuhsohlen, oder noch besser in Socken).
- Machen Sie eine Vierteldrehung um die senkrechte Achse.

Ich erkläre nicht, wie Sie es anstellen müssen, denn ich möchte Ihnen ja beweisen, das Sie es auch ohne Anleitung schaffen,.

(Sie können die Drehung auch auf andere Art realisieren, nämlich unter Ausnutzung der Reibung. Probieren Sie auch das: Wieder auf einem Bein stehend. Allerdings ist das hier nicht unser Thema.)

2. Was die Katze schafft (oder was Sie gerade eben geschafft haben), ist nicht bemerkenswerter als viele andere Leistungen, die wir ständig vollbringen, und über die wir uns im Physikunterricht keine Gedanken machen (vielleicht zu Unrecht): Aufrecht gehen, rennen, Rad fahren, freihändig Rad fahren, Schlittschuh laufen, seiltanzen…

3. Es wird ein unnötiger Aufwand getrieben, den scheinbaren Widerspruch zu lösen.

Herkunft

1. Die Diskussion des Problems hat eine lange Tradition. Schon Maxwell und Stokes, aber auch viele andere, haben sich damit beschäftigt.

2. Es offenbart das Kind im Mann (oder in der Frau).

3. Wir, die Physiker und Physikerinnen, können damit dem Rest der Menschheit, d.h. den 80 % der Bevölkerung, die stolz auf ihr physikalisches Analphabetentum sind, zeigen, dass sich die Physik nicht nur mit Higgs-Teilchen, verschränkten Photonen und dunkler Energie beschäftigt, wofür die sich nicht interessieren. Sogar um ihr geliebtes Haustier zu verstehen, braucht man Physik.

4. Vielleicht auch ein etwas verkrampftes Verhältnis zum Drehimpuls.

Entsorgung

Ein hübscher Effekt, den man im Unterricht zeigen kann. Wie gesagt, braucht man keine Katze. Damit bei der Drehung die Reibung sichtbar ausgeschlossen ist, bitte ich einen Schüler oder eine Schülerin, sich auf einen Drehstuhl zu setzen, und sich horizontal zu drehen, ohne sich am Boden abzustützen. Ich habe es nie erlebt, dass das jemand nicht konnte.

Was ist an dem Experiment interessant? Vor allem die Tatsache, dass das analoge Experiment der Translationsmechanik nicht funktioniert.

Es würde so aussehen: Zwei Wagen A und B; Willy (der Protagonist des *Karlsruher Physikkurses*) sitzt auf Wagen A und versucht, indem er an Wagen B zieht oder gegen ihn drückt, oder ihn vor- und zurückschüttelt, den Schwerpunkt des Gesamtsystems zu verschieben, Abb. 1.

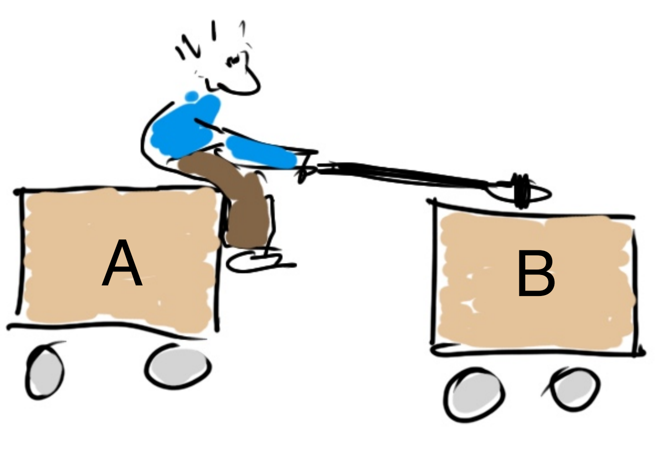

Abb. 1. Der Schwerpunkt lässt sich nicht verschieben.

Wie man weiß, geht das nicht. Es lässt sich auch leicht theoretisch zeigen:

Mit

$$p = m \cdot v$$

und

$$\Delta s = \int v\, dt$$

wird

$$\Delta s = \frac{1}{m} \int p\, dt$$

und damit

$$m \Delta s = \int p\, dt$$

Das gilt sowohl für Wagen A (mit Willy) als auch für Wagen B. Wegen der Impulserhaltung folgt:

$$m_A\, \Delta s_A = -\, m_B\, \Delta s_B$$

Jede Verschiebung Δs_A des Wagens 1 ist mit einer Verschiebung

$$\Delta s_B = -\frac{m_A}{m_B} \Delta s_A \qquad (1)$$

des Wagens B verknüpft. Das bedeutet, dass sich der Schwerpunkt des Systems aus beiden Wagen nicht verschiebt, was für Bewegungen Willy auch immer macht. Und wenn am Ende der Abstand zwischen den Wagen wieder so ist wie am Anfang, so sind auch die Positionen beider Wagen wieder die alten. Eine Voraussetzung für diese Folgerung war allerdings, dass die Massen m_A und m_B nicht verändert werden.

Wir wollen aber auch noch untersuchen, was passiert, wenn Massenänderungen zugelassen sind.

Wagen A sei zunächst leer und leicht, Wagen B mit Sand beladen und schwer. Willy sitzt wieder auf Wagen A und zieht mit Hilfe der Stange an dem schweren Wagen B. B bewegt sich nur wenig, A dagegen viel. Dann wird B ent- und A beladen, d.h. jetzt ist A schwer und B leicht. Willy stößt sich mit Hilfe der Stange von B ab. Jetzt bewegt sich A wenig und B viel. Am Ende ist der Abstand zwischen A und B wieder wie am Anfang, aber das ganze System hat sich nach rechts verschoben. Möglich war das, weil man die Massen verändert hat: das Verhältnis m_A/m_B war beim Wegstoßen und beim Wiederheranziehen nicht dasselbe. Dass der Schwerpunkt der beiden Wagen am Ende nicht mehr da liegt, wo er am Anfang war, wundert einen nicht. Man hat gewissermaßen gemogelt. Interessant ist die Geschichte nur deshalb, weil man beim Rotations-Analogon ganz ähnlich verfährt. Allerdings geht es dabei ohne Mogeln.

Wir betrachten zwei Hanteln, die um eine gemeinsame Achse rotieren können, Abb. 2. Statt eine Nettoverschiebung, wollen wir eine Nettodrehung erreichen.

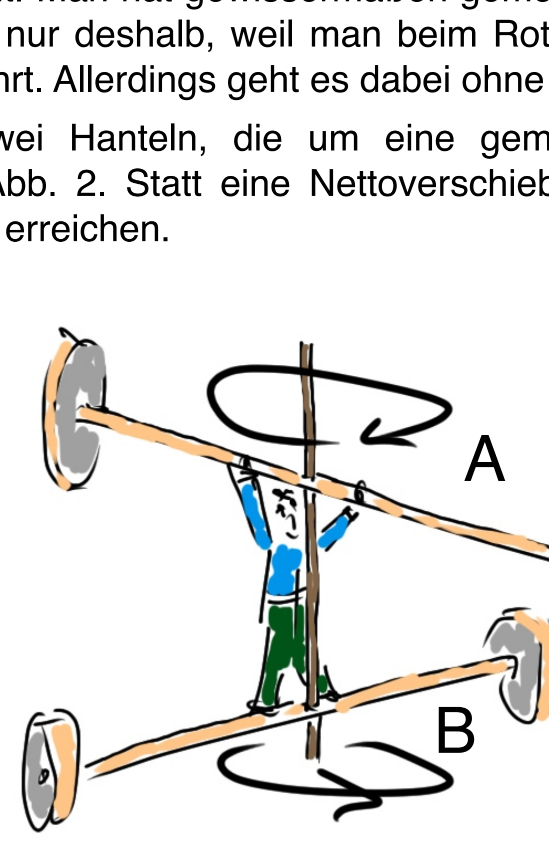

Abb. 2. Durch Hin- und Herdrehen der Hanteln lässt sich die Orientierung ändern, wenn man das Trägheitsmoment einer Hantel bei dem Vorgang ändert, indem man die Gewichte an den Enden verschiebt.

Es gilt die zu (1) analoge Gleichung:

$$\Delta\alpha_B = -\frac{J_A}{J_B} \Delta\alpha_A \qquad (2)$$

(α ist der Drehwinkel, J das Trägheitsmoment. Die Herleitung geht genau wie die oben).

Wenn man auf der unteren Hantel steht und versucht, die obere zu verdrehen, so verdreht sich auch die untere, und die Drehwinkel stehen in dem Verhältnis, das durch Gleichung (2) gegeben ist.

Wenn man die Trägheitsmomente unverändert lässt, so gehört zu jedem $\Delta\alpha_A$ ein ganz bestimmtes, durch Gleichung (2) gegebenes $\Delta\alpha_B$. Dreht man einmal hin und wieder zurück, so weist am Ende jede der Hanteln wieder in die ursprüngliche Richtung.

Nun kann man aber die Trägheitsmomente verändern, ohne die Masse zu verändern, ohne irgendetwas auf- oder abzuladen. Wenn man nun eine Hin- und Rückdrehung macht, und dafür sorgt, dass etwa das Trägheitsmoment J_A bei der Hindrehung größer ist als bei der Rückdrehung, so bleibt ein Nettodrehwinkel übrig. Genau das tun Katze oder Mensch, wenn sie sich drehen.