

175 Symmetrien in der Elektrodynamik

ZUSAMMENFASSUNG

Die Elektrodynamik ist reich an inneren Strukturen. Es folgt, dass es miteinander konkurrierende Analogien gibt. Das wird oft nicht beachtet. Eine der Folgen ist der unnötige Disput darüber, ob \vec{B} oder \vec{H} die „richtige“ Größe zur Beschreibung des magnetischen Feldes ist.

Gegenstand

Die Elektrodynamik ist reich an inneren Strukturen, Symmetrien oder Analogien. Diese äußern sich in den Phänomenen und werden sichtbar in der theoretischen Beschreibung. Einige Beispiele:

- Coulomb hat seinen heute als Coulombsches Gesetz bezeichneten Zusammenhang entdeckt und nachgewiesen sowohl für elektrisch geladene Körper als auch für Magnetpole.
- Auf einen elektrisch geladenen bewegten Körper wirken zwei Kräfte, die oft als analog zueinander dargestellt werden: die eine ist proportional zur elektrischen Feldstärke \vec{E} , die andere, die Lorentzkraft, ist proportional zur magnetischen Flussdichte \vec{B} .
- In der Elektrotechnik spielen Kondensator und Spule, und damit auch Kapazität C und Induktivität L analoge Rollen. Dies wird etwa beim elektrischen Schwingkreis deutlich.

Mängel

Die Strukturen, um die es hier geht, bestehen darin, dass physikalische Größen, sowie mathematische Beziehungen zwischen diesen Größen, aufeinander abgebildet werden können. Wenn man in einer Gleichung die in ihr auftretenden Größen nach bestimmten, die Analogie charakterisierenden Übersetzungsregeln ersetzt, so erhält man eine neue Gleichung, die wieder korrekt ist.

Ein Problem, das manchmal nicht gesehen wird, ist, dass es innerhalb eines Teilbereichs der Physik mehrere konkurrierende Analogien oder Abbildungen gibt, die auf unterschiedlichen Zuordnungen der Größen beruhen. Ein Beispiel ist die Elektrodynamik. Die oben genannten Beispiele beruhen auf solchen konkurrierenden Analogien.

Wenn man sich der Tatsache bewusst ist, dass es nicht nur eine Analogie gibt, wird man immer wieder in Konflikte geraten. Welches ist die zu \vec{E} analoge magnetische Größe, \vec{B} oder \vec{H} ? Manchmal scheint es die eine zu sein, manchmal die andere. Oft hat man sogar den Eindruck, es werden ideologische Standpunkte vertreten: Die „richtige“ oder „eigentliche“ magnetische Feldstärke sei \vec{B} (oder \vec{H}); in manchen Schulbüchern wird die Flussdichte sogar kurzerhand umbenannt in magnetische Feldstärke.

Das Problem löst sich erst, wenn man sich vergegenwärtigt, dass es sich um verschiedene Abbildungen handelt, und dass man beide (oder in unserem Fall alle drei) kennt. Es kann dann nur noch um die Frage gehen, welche die dem Problem angemessene ist.

Die drei Analogien der Elektrodynamik seien mit Hilfe von drei Tabellen noch einmal in Erinnerung gebracht. Jede Tabelle enthält sowohl die sich entsprechenden Größen, als auch einige sich entsprechende Gleichungen.

1. Die Analogie $\vec{E} - \vec{H}$

Sie offenbart sich in den Maxwellgleichungen, Tabelle 1.

Sie ist besonders hilfreich bei der Behandlung der Magnetostatik, da das \vec{H} -Feld Quellen hat, und sich damit ein \vec{H} -Feldlinienbild genau so leicht zeichnen lässt wie ein \vec{E} -Feldlinienbild in der Elektrostatik. Bekanntlich haben Studenten (und nicht nur die) Schwierigkeiten mit dem Zeichnen von magnetischen Feldlinienbildern [1].

elektrische Vektorfeldgrößen	magnetische Vektorfeldgrößen
elektrische Feldstärke \vec{E}	magnetische Feldstärke \vec{H}
elektrische Flussdichte \vec{D}	magnetische Flussdichte \vec{B}
Polarisation \vec{P}	Magnetisierung \vec{M}
<i>elektrische Ladung</i>	<i>magnetische Ladung</i>
Gesamtladung Q	Gesamtladung Q_m
<i>Ladungsdichte</i>	<i>Ladungsdichte:</i>
Gesamtladung ρ	Gesamtladung ρ_m
freie Ladung ρ_F	freie Ladung $\rho_{mF} = 0$
Polarisationsladung ρ_P	Polarisationsladung ρ_{mP}
<i>Erste Maxwellgleichung</i>	<i>Zweite Maxwellgleichung</i>
$\text{div } \vec{D} = \rho_F$	$\text{div } \vec{B} = \rho_{mF} = 0$
$\text{div } \vec{P} = -\rho_P$	$\text{div } \vec{M} = -\rho_{mP}$
$\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho_F + \rho_P$	$\mu_0 \text{div } \vec{H} = \rho_{mF} + \rho_{mP} = \rho_{mP}$
<i>elektrische Stromdichte</i>	<i>magnetische Stromdichte</i>
Leitungsstrom \vec{j}_L	Leitungsstrom $\vec{j}_{mL} = 0$
Verschiebungsstrom $\vec{j}_V = \dot{\vec{D}}$	Verschiebungsstrom $\vec{j}_{mV} = \dot{\vec{B}}$
<i>Dritte Maxwellgleichung</i>	<i>Vierte Maxwellgleichung</i>
$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{j}}_{mL} - \dot{\vec{B}} = -\dot{\vec{B}}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_L + \dot{\vec{D}}$
<i>Kraftgesetze</i>	<i>Kraftgesetze</i>
$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$	$\vec{F} = Q_m \cdot \vec{H}$
$ \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$	$ \vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_{m1} \cdot Q_{m2}}{r^2}$
<i>Energiestromdichte</i>	$\vec{j}_E = \vec{E} \times \vec{H}$

Tabelle 1
Analogie, bei der sich \vec{E} und \vec{H} entsprechen. Die freie elektrische Ladung und der elektrische Leitungsstrom haben kein magnetisches Analogon.

2. Die Analogie $\vec{E} - \vec{B}$

Sie beruht auf der Darstellung der Elektrodynamik mit Vierervektoren. Hier entspricht die zeitartige Komponente eines Vierervektors den drei raumartigen Komponenten. So wie Zeit und Ort, oder Energie und Impuls, entsprechen sich elektrische Ladungsdichte und Stromdichte, elektrische Potenzial ϕ und magnetisches Vektorpotenzial \vec{A} . Die räumliche Ableitung der Potenzial, also der Gradient von ϕ und die Rotation von \vec{A} ergeben die beiden Vektorgrößen \vec{E} bzw. \vec{B} , mit denen man die Kraftgesetze formuliert, Tabelle 2.

Quellen des elektrischen Feldes	Quellen des magnetischen Feldes
elektrische Ladungsdichte ρ	elektrische Stromdichte \vec{j}
<i>elektrische Vektorfeldgröße</i>	<i>magnetische Vektorfeldgröße</i>
elektrische Feldstärke \vec{E}	magnetische Flussdichte \vec{B}
<i>Potenzialgröße</i>	<i>Potenzialgröße</i>
elektrisches Potenzial ϕ	magnetisches Vektorpotenzial \vec{A}
<i>Ableitung des Potenzials</i>	<i>Ableitung des Potenzials</i>
$\vec{E} = -\text{grad } \phi$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
<i>Kraftgesetze</i>	<i>Kraftgesetze</i>
$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$	$\vec{F} = I \cdot (\vec{s} \times \vec{B})$ (Lorentzkraft)
$ \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$	$ \vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot \text{Länge}$ (zwei parallele Ströme)

Tabelle 2
Analogie, bei der sich \vec{E} und \vec{B} entsprechen.

3. Die Analogie $U-I$

Sie ist besonders in der Elektrotechnik nützlich. Sie ist eine Variante der $\vec{E} - \vec{H}$ -Analogie. Allerdings wird die Abbildung hier „über Kreuz“ gemacht: Es wird nicht die elektrische Ladung auf die magnetische Ladung abgebildet, sondern auf den magnetischen Fluss, Tabelle 3.

physikalische Größen	
elektrische Ladung Q	⇔ magnetischer Fluss $-\phi$
elektrische Spannung U	⇔ elektrische Stromstärke I
Kapazität C	⇔ Induktivität L
elektrischer Widerstand R	⇔ elektrischer Leitwert G
Energie E	⇔ Energie E
Energiestrom P	⇔ Energiestrom P
<i>Gleichungen</i>	
$I = \frac{dQ}{dt}$	⇔ $U = -\frac{d\phi}{dt}$
$P = U \cdot I$	⇔ $P = U \cdot I$
$Q = C \cdot U$	⇔ $\phi = L \cdot I$
$E = \frac{C}{2} U^2$	⇔ $E = \frac{L}{2} I^2$
<i>Bauelemente</i>	
Kondensator	⇔ Spule
spannungsstabiles Netzgerät	⇔ stromstabiles Netzgerät
<i>topologische Regeln</i>	
Reihenschaltung	⇔ Parallelschaltung
Kurzschluss	⇔ Leerlauf

Tabelle 3
Für die Elektrotechnik wichtige Analogie. Es entsprechen sich nicht nur physikalische Größen und Gleichungen, sondern auch technische Bauelemente und topologische Regeln.

Diese Analogie ist von anderer Art als die beiden zuvor beschriebenen: Hier wird ein Stromkreis auf einen anderen abgebildet, und es wird die Übersetzungstabelle gleichzeitig von links nach rechts und von rechts nach links angewendet. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem *Dualismus*. Man ersetzt also etwa Spannung durch Stromstärke und Stromstärke durch Spannung, Kondensator durch Spule, und Spule durch Kondensator, oder Parallelschaltung durch Reihenschaltung und Reihenschaltung durch Parallelschaltung etc.

Eigentlich würde dazu gehören, dass man den elektrischen Fluss auf die magnetische Ladung abbildet. Die zugehörigen technischen Bauelemente wären der „magnetische Kondensator“, sowie eine Spule, durch deren „Leitung“ ein „magnetischer Strom“ fließt. Da es keine freie magnetische Ladung und keine magnetischen Leitungsströme gibt (sondern nur gebundene Ladung und Verschiebungsströme), sind beide Bauteile eher uninteressant.

Herkunft

Die Analogie $\vec{E} - \vec{H}$ war auf Grund der klassischen Elektrodynamik in der Maxwell'schen Formulierung die naheliegende. Mit der Relativitätstheorie und der Minkowski-Raumzeit kam die Viererbeschreibung in die Physik, und damit wurde die $\vec{E} - \vec{B}$ -Analogie beliebt. Die dritte Analogie verdankt ihre Beliebtheit der Tatsache, dass sie in der Elektrotechnik besonders nützlich, und darüber hinaus die Grundlage für eine Analogie zwischen Elektrotechnik und Mechanik ist (wobei dem Kondensator die Feder, der Spule der träge Körper und dem Widerstand der Stokessche Reibungsdämpfer entspricht [2]).

Der Streit, ob \vec{H} oder \vec{B} geeigneter, richtiger oder wahrer ist, mag zwei Ursachen haben:

1. Man kennt die eine der Analogien; die andere ist einem unbekannt oder suspekt.
2. Man identifiziert das System Feld mit der Größe Feldstärke, d.h. man ignoriert die Tatsache, dass physikalische Größen menschliche Erfindungen oder Konstruktionen sind.

Selbst der große Sommerfeld schien der Meinung gewesen zu sein, dass es bei der Wahl der Darstellung um richtig oder falsch geht, und nicht einfach nur um zweckmäßig oder weniger zweckmäßig [3]:

„Die Faraday-Maxwell'sche Induktionsgleichung zeigt, dass zugleich mit der elektrischen Feldstärke E die magnetische Induktion eine Intensitätsgröße ist; B , nicht H verdient den Namen *magnetische Feldstärke*. [...] Daß B mit E , H mit D zusammengehöre, erhellt unzweideutig aus der Relativitätstheorie, wo die Größen cB und $-iE$ einerseits, die Größen H und $-icD$ andererseits je zu einem Echersektor (antisymmetrischen Tensor) verkoppelt werden.“

Entsorgung

1. Vor allem kein Dogmatismus; keine Behauptungen darüber, welche Größe die wirkliche Feldstärke sei.
2. Den Studierenden klar machen, dass es in der Elektrodynamik verschiedene Analogien gibt.

[1] F. Herrmann: *Altlasten der Physik*, Teil 1, Das Feld von Dauermagneten

[2] F. Herrmann: *Altlasten der Physik*, Teil 2, Die Induktivität

[3] A. Sommerfeld: *Elektrodynamik*, 4. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest] Portig, Leipzig, 1964, Vorwort, S. VI